

Álgebras y Fibrados de Clifford con Aplicaciones

EDUARDO NOTTE CUELLO



EDITORIAL
UNIVERSIDAD
DE LA SERENA

Introducción

En Física-Matemática un tema de investigación actual es el estudio y aplicaciones de las llamadas álgebras de Clifford o álgebra geométrica, las cuales permiten describir propiedades de los objetos en el espacio tiempo y pueden exponer de manera natural las propiedades del propio espacio tiempo[21].

Un álgebra geométrica es una representación algebraica de conceptos geométricos. Un álgebra que puede efectivamente describir las propiedades de objetos en el espacio tiempo y las propiedades del mismo espacio tiempo, es de particular importancia para los Físicos teóricos. Diferentes álgebras geométricas han sido desarrolladas por Matemáticos y de vez en cuando algunas han sido adoptadas por los Físicos. Así, durante el siglo diecinueve J. Willard Gibbs introdujo un álgebra de vectores para describir el espacio tri-dimensional, basado en las ideas del álgebra exterior de Grassmann y los cuaterniones de Hamilton. Con la aparición de la teoría de la relatividad de Einstein, una nueva álgebra geométrica se hizo necesaria para describir el espacio tiempo cuatro-dimensional, a tal álgebra se le llamó álgebra tensorial. Luego, Pauli introdujo una nueva álgebra para describir el espín del electrón, sucesivamente, Dirac definió otra álgebra que le permitía describir tanto la relatividad especial como el espín. Cada uno de estos sistemas, álgebra vectorial, tensorial, las álgebras de Pauli y Dirac, son álgebras geométricas con propiedades especiales para la Física y por ello cada sistema es usado en la actualidad. El desarrollo de una estructura que combine las virtudes de todos los sistemas anteriores es el principal objetivo de las álgebras de Clifford de multivectores (o multiformas) o también llamadas álgebras geométrica de multivectores.

Esta monografía consta de tres capítulos, en el primero de ellos, definiremos los objetos matemáticos llamados multivectores como n -uplas de k -vectores y mostraremos una construcción de un álgebra de Clifford o también llamada álgebra geométrica de multivectores. Introduciremos el producto exterior formando el álgebra exterior de multivectores, el producto escalar y los productos contraídos a la derecha e izquierda de donde se construye el álgebra interior de multivectores. Los productos antes mencionados nos permitirán definir un álgebra de Clifford de multivectores o álgebra geométrica de multivectores. Este capítulo está escrito con muchos detalles, de manera que cualquier estudiante de Licenciatura en Matemática o Licenciatura en Física que haya cursado las asignaturas básicas de álgebra lineal pueda comprender el material exhibido.

En el segundo capítulo, aplicamos las estructuras algebraicas estudiadas anteriormente en el área de las ecuaciones en derivadas parciales, se definen los operadores de Dirac asociados a distintas conexiones y se presentan algunas relaciones entre estos operadores. Presentamos la ecuación de Maxwell sobre el fibrado de Clifford y mostramos su equivalencia con el sistema de ecuaciones de Maxwell en la formalismo vectorial canónico. Finalmente, usando un operador de Dirac particular en \mathbb{R}^n , aplicamos la teoría a la mecánica de fluidos, escribimos las ecuaciones de Navier-Stokes y las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en el formalismo de Clifford y mostramos una representación integral en términos de operadores proporcionados por el llamado análisis de Clifford, para cada sistema.

En el tercer capítulo se presentan algunas aplicaciones en relatividad general del formalismo de Clifford, esto es, se analizará la compatibilidad del principio de superposición para los campos de Maxwell y el principio de conservación de energía-momento, más exactamente, se probará, que la energía y el momento de dos diferentes campos de Maxwell arbitrarios, de energía finita, son aditivos y también determinaremos un efectivo espacio tiempo de Weitzenböck y un efectivo espacio tiempo Lorentziano determinados por una configuración del campo electromagnético libre (sin fuente) "viviendo" sobre un espacio tiempo Minkoskiano y satisfaciendo la ecuación de Maxwell $\partial F = 0$, donde ∂ representa el operador de Dirac estándar.

Capítulo 1

ÁLGEBRA DEL ESPACIO TIEMPO

En este capítulo se pretende entregar los conceptos generales sobre las álgebras de Clifford de multivectores, estructura algebraica que será usada en los capítulos dos y tres del texto. El capítulo comienza con los conceptos básicos de álgebra lineal, como espacios vectoriales, aplicaciones lineales y multilineales, k -tensores y los productos definidos en estas estructuras, estos tópicos son básicamente los contenidos que se aprenden en las dos primeras asignaturas de álgebra lineal que se dictan para las carreras de licenciatura en Matemática o licenciatura en Física, en particular los textos recomendados para detalles son los excelentes libros [3, 22]. A partir de la definición de multivectores el temas es más específicos y no aparece, en general, en los libros de álgebra lineal o álgebra tensorial, por lo que la bibliografía recomendada es [11, 12], en estos artículos los autores introducen las álgebras de Clifford de Multivectores y realizan un detallado estudio del producto exterior de multivectores, estructuras métricas, productos contraídos de multivectores y producto de Clifford, que son los tópicos que discutiremos en este capítulo.

Sean V y W espacios vectoriales reales de dimensión finita. Una función $f : V \rightarrow W$ es llamada una aplicación lineal o transformación lineal de V en W , si $\forall v_1, v_2 \in V$ y $a \in \mathbb{R} : f(av_1 + v_2) = af(v_1) + f(v_2)$.

Una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ se dice un isomorfismo de V sobre W si f es inyectiva y sobre yectiva, el concepto de isomorfismo significa que en términos de sus propiedades de espacio vectorial, V y W no son distinguibles. En este caso V y W se dicen isomorfos y se escribe $V \simeq W$.

Proposición 1 *Una aplicación lineal es únicamente determinada por sus valores sobre una base. Dado un conjunto de valores en correspondencia 1–1 con los elementos de una base de V , existe una única aplicación lineal que tiene estos valores como sus valores sobre la base*

Demostración. Sea $f : V \rightarrow W$ una aplicación lineal y $\{e_i\}$ una base de V . Necesitamos mostrar que f es determinada por los valores $f(e_i) \in W$. Para cualquier $v \in V$ tenemos la única expresión coordenada $v = a^i e_i$, y como f es lineal, se tiene

$$f(v) = f(a^i e_i) = a^i f(e_i),$$

así, $f(v)$ depende de los valores $f(e_i)$ y de los a^i , los cuales dependen de v y los e_i .

Por otro lado, dado un conjunto de vectores $w_i \in W$, la fórmula

$$f(v) = f(a^i e_i) = a^i w_i$$

define una aplicación lineal. En efecto,

$$f(v + \bar{v}) = f(a^i e_i + \bar{a}^i e_i) = (a^i + \bar{a}^i) w_i = f(v) + f(\bar{v})$$

$$f(av) = f(aa^i e_i) = aa^i w_i = af(v).$$

■

Corolario 2 Si $\dim V = \dim W$, entonces V y W son isomorfos.

El conjunto de las aplicaciones lineales f, g, \dots de V en W forma un espacio vectorial lineal, el cual se denota por $L(V, W)$.

Se define la suma de las aplicaciones lineales f y g por

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v),$$

y el producto por escalar de $a \in \mathbb{R}$ y f por

$$(af)(v) = af(v)$$

para todo $v \in V$. Es trivial verificar que $f + g$ y af son aplicaciones lineales y que $L(V, W)$ es un espacio vectorial bajo estas operaciones.

Examinemos ahora, que forma toma una aplicación lineal en términos de componentes con respecto a las bases. Supongamos que $\dim W = d_1$ y $\dim V = d_2$, y que $\{e_i\}$ es una base de V , $\{\bar{e}_\alpha\}$ es una base de W . El índice α será usado como un índice de suma corriendo desde 1 a d_1 , e i correrá de 1 a d_2 . Para una aplicación lineal $f : V \rightarrow W$ podemos escribir las expresiones coordenadas para $f(e_i)$ como

$$f(e_i) = a_i^\alpha \bar{e}_\alpha, \quad (1.1)$$

luego por la proposición 1, f es únicamente determinada por sus valores bases $a_i^\alpha \bar{e}_\alpha$ y así, por la matriz (a_i^α) y las bases $\{e_i\}$ y $\{\bar{e}_\alpha\}$.

Proposición 3 (a) Si $\dim V = d_2$ y $\dim W = d_1$, entonces $\dim L(V, W) = d_1 d_2$

(b) Si $\{e_i\}$ es una base para V y $\{\bar{e}_\alpha\}$ una base para W , entonces una base para $L(V, W)$ es $\{E_\beta^j\}$, donde E_β^j son las aplicaciones lineales definidas por (proposición 1)

$$E_\beta^j e_i = \delta_i^j \bar{e}_\beta.$$

(c) Si $\{f_i^\alpha\}$ es la matriz de $f \in L(V, W)$, entonces la expresión para f en término de la base $\{E_\beta^j\}$ es

$$f = f_i^\alpha E_\alpha^i.$$

Demostración. Las E_α^i son linealmente independientes. En efecto, si $a_j^\beta E_\beta^j = 0$, entonces

$$a_j^\beta E_\beta^j e_i = a_j^\beta \delta_i^j \bar{e}_\beta = a_i^\beta \bar{e}_\beta = 0,$$

y como \bar{e}_α son linealmente independientes, $a_i^\alpha = 0$ para $\alpha = 1, \dots, d_1$ e $i = 1, \dots, d_2$. Ya que, por definición de (f_i^α) ,

$$f(e_i) = f_i^\alpha \bar{e}_\alpha$$

y como

$$f_j^\alpha E_\alpha^j e_i = f_j^\alpha \delta_i^j \bar{e}_\alpha = f_i^\alpha \bar{e}_\alpha,$$

se sigue que $f = f_i^\alpha E_\alpha^i$. Así los E_β^j generan a $L(V, W)$, y como son linealmente independientes forman una base. ■

El espacio vectorial $L(V, \mathbb{R})$ es llamado el espacio dual de V y es denotado por V^* . Note que, por la proposición 3, si $\dim V = n$, entonces $\dim V^* = n$.

Existe una base natural para \mathbb{R} , el número 1. Así, de acuerdo a la proposición 3, para cada base $\{e_i\}$ de V , existe una única base $\{\varepsilon^i\}$ de V^* tal que

$$\varepsilon^i e_j = \delta_j^i. \quad (1.2)$$

Las aplicaciones lineales $\varepsilon^i : V \rightarrow \mathbb{R}$ definidas por (1.2) son llamadas la base dual de la base $\{e_i\}$.

Definición 4 a) *Un k -tensor contravariante sobre V es una aplicación multilineal*

$$t : V^* \times \dots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}.$$

b) *Un k -tensor covariante sobre V es una aplicación multilineal*

$$\sigma : V \times \dots \times V \rightarrow \mathbb{R}.$$

Teorema 5 *El conjunto de todos los k -tensores contravariantes y k -tensores covariantes forman espacios vectoriales reales, denotado por $T_k V$ y $T_k V^*$ respectivamente, con la suma de k -tensores contravariantes y k -tensores covariantes respectivamente y multiplicación por escalar.*

Ejemplo 6 *Sea $t \in T_2 V$, entonces*

$$t : V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R} / \quad (\omega, \sigma) \longmapsto t(\omega, \sigma),$$

si $t(\omega, \sigma) = -t(\sigma, \omega)$ se dice que t es un 2-tensor anti-simétrico.

Definición 7 *Un k -vector sobre V es un k -tensor contravariante sobre V totalmente anti-simétrico.*

Teorema 8 *El conjunto de todos los k -vectores constituyen un espacio vectorial real, denotado por $\Lambda^k V$, con la suma de k -vectores y multiplicación por escalar.*

Ejemplo 9 Sea t un 3-vector sobre V

$$t : V^* \times V^* \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$t(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = -t(\omega_2, \omega_1, \omega_3) = -t(\omega_3, \omega_2, \omega_1) = -t(\omega_1, \omega_3, \omega_2).$$

Definición 10 Una k -forma sobre V es un k -tensor covariante sobre V totalmente anti-simétrico.

Teorema 11 El conjunto de todas las k -formas constituyen un espacio vectorial real, denotado por $\Lambda^k V^*$, con la suma de k -vectores y multiplicación por escalar.

Proposición 12 Si t es un 2-vector, entonces $t(\omega, \omega) = -t(\omega, \omega) = 0$.

Proposición 13 Si $\dim V = n$, entonces $\dim T_k V = \dim T_k V^* = n^k$, esta proposición se demostrará más adelante.

Proposición 14 Si $\dim V = n$, entonces $\dim \Lambda^k V = \dim \Lambda^k V^* = \binom{n}{k}$.

Definición 15 Un 0-tensor contravariante es un número real y un 1-tensor contravariante es identificado con un vector.

Nota 16 Si $k \geq 0$, entonces $\dim T_k V = n^k$, luego $\dim T_0 V = n^0 = 1$. Por otro lado, si $k = 1$, un 1-tensor contravariante $t : V^* \rightarrow \mathbb{R}$, es tal que $t \in (V^*)^* \approx V$, luego t se identifica con un vector.

Esquemáticamente tenemos

$\Lambda^0 V \equiv \mathbb{R}$	$\Lambda^1 V \equiv V$...	$\Lambda^{n-1} V$	$\Lambda^n V$
0 – vector	1 – vector	...	$(n-1)$ – vector	n – vector
Escalar	vector	...	Pseudo-vector	Pseudo-escalar
$\binom{n}{0} = 1$	$\binom{n}{1} = n$...	$\binom{n}{n-1} = n$	$\binom{n}{n} = 1$

Ahora, usando el concepto de k -vector pasaremos a definir los objetos matemáticos llamados multivectores, fundamentales para la construcción del álgebra de Clifford de multivectores. La metodología es análoga para la construcción de las multiformas, usando el concepto de k -formas.

Definición 17 Se define el conjunto de los multivectores como:

$$\Lambda V = \left\{ (X_0, X_1, \dots, X_n) \in \Lambda^0 V \times \Lambda^1 V \times \dots \times \Lambda^n V \right\}$$

*Note que $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} < n^k$.

Definición 18 Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \Lambda V$, entonces se define la suma de Multivectores y el producto por escalar como:

$$\begin{aligned} X + Y &= (X_0, X_1, \dots, X_n) + (Y_0, Y_1, \dots, Y_n) \\ &= (X_0 + Y_0, X_1 + Y_1, \dots, X_n + Y_n) \in \Lambda V \\ \alpha X &= (\alpha X_0, \alpha X_1, \dots, \alpha X_n) \in \Lambda V, \end{aligned}$$

luego, con la suma y el producto por escalar el conjunto de los multivectores forman un espacio vectorial real, denotado por ΛV , llamado espacio de multivectores sobre V .

Para calcular la dimensión de ΛV , recordemos la siguiente proposición.

Proposición 19 Si V y W son dos espacios vectoriales con $\dim V = n$ y $\dim W = p$, entonces $\dim V \times W = n + p$.

Demostración. Si $\{v_i\}$ y $\{w_i\}$ son bases de V y W respectivamente, entonces debemos demostrar que

$$\{(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_p)\} = \{(v_i, 0), (0, w_j)\} = \{(v_i, w_j)\}$$

es una base de $V \times W$, observe que $i = 1, \dots, n$ y $j = 1, \dots, p$.

a) Sea $A \in V \times W$, entonces $A = (A_1, A_2)$ con $A_1 \in V$ y $A_2 \in W$, luego $A_1 = A_1^i v_i$ y $A_2 = A_2^j w_j$.

$$\begin{aligned} A &= (A_1^i v_i, 0) + (0, A_2^j w_j) \\ &= A_1^i (v_i, 0) + A_2^j (0, w_j), \end{aligned}$$

luego $\{(v_i, 0), (0, w_j)\}$ generan $V \times W$.

b) Además $\{(v_i, 0), (0, w_j)\}$ es linealmente independiente, en efecto. Si $B \in V \times W$, podemos escribir

$$B = B_1^i (v_i, 0) + B_2^j (0, w_j),$$

luego si $B_1^i (v_i, 0) + B_2^j (0, w_j) = (0, 0)$, debemos demostrar que $B_1^i, B_2^j = 0, \forall i, j$.

$$B_1^i (v_i, 0) + B_2^j (0, w_j) = (B_1^i v_i, B_2^j w_j) = (0, 0),$$

de donde $B_1^i v_i = 0$ y $B_2^j w_j = 0$ y dado que $\{v_i\}$ y $\{w_i\}$ son bases de V y W respectivamente, se tiene que $B_1^i, B_2^j = 0, \forall i, j$. ■

Ahora, usando la proposición anterior podemos demostrar que la dimensión de ΛV es 2^n , en efecto

$$\begin{aligned} \dim \Lambda V &= \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots + \binom{n}{n} \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = (1 + 1)^n = 2^n. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Para relacionar los multivectores con los k -vectores es necesario introducir los llamados operadores de proyección y de inclusión, así como los operadores k -partes.

Definición 20 $\forall k = 0, 1, \dots, n;$ y $X = (X_0, X_1, \dots, X_n) \in \Lambda V$ se define el operador

$$\pi_k : \Lambda V \rightarrow \Lambda^k V \quad / \quad \pi_k(X) = X_k,$$

llamado operador de proyección k -componente.

Definición 21 Se define el conjunto de multivectores homogéneos como:

$$\Lambda^{(k)}V = \left\{ X_{(k)} = (\dots, 0_{k-1}, X_k, 0_{k+1}, \dots) \ / X_k \in \Lambda^k V \right\} \subset \Lambda V$$

a) $\Lambda^{(k)}V$ es un subespacio vectorial de ΛV , es decir $0 \in \Lambda^{(k)}V$ y la adición de multivectores k -homogéneos y la multiplicación por escalar son también multivectores k -homogéneos, además $\dim \Lambda^{(k)}V = \dim \Lambda^k V = \binom{n}{k}$.

b) $\Lambda^{(k)}V$ es linealmente isomorfo a $\Lambda^k V$, en efecto, se puede definir el isomorfismo τ_k , como sigue:

$$\begin{aligned} \tau_k : \Lambda^k V &\rightarrow \Lambda^{(k)}V; & \tau_k^{-1} : \Lambda^{(k)}V &\rightarrow \Lambda^k V \\ \tau_k(X_k) &= X_{(k)}; & \tau_k^{-1}(X_{(k)}) &= X_k \\ \tau_k^{-1} \circ \tau_k &= i_{\Lambda^k V}; & \tau_k \circ \tau_k^{-1} &= i_{\Lambda^{(k)}V}. \end{aligned}$$

De lo anterior, si $X = (X_0, X_1, \dots, X_n) \in \Lambda V$, entonces usando la inclusión τ_k y el operador proyección π_k , podemos escribir

$$X = \sum_{k=0}^n \tau_k(X_k) = \sum_{k=0}^n \tau_k \circ \pi_k(X),$$

además, se puede demostrar que

$$(\pi_j \circ \tau_k)(X_k) = \begin{cases} 0_j & \text{si } j \neq k \\ X_k & \text{si } j = k \end{cases} \quad (1.4)$$

Otros operadores importante sobre ΛV son los operadores k -partes, definidos por

$$\langle \rangle_k : \Lambda V \rightarrow \Lambda V \text{ tal que } \langle X \rangle_k = \tau_k(\pi_k X), \quad (1.5)$$

es decir, si $X = (X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_n)$, entonces

$$\langle X \rangle_k = (\dots, 0_{k-1}, X_k, 0_{k+1}, \dots).$$

Como podemos ver, $\langle \rangle_k = \tau_k \circ \pi_k$.

Cada $\langle \rangle_k$ es un operador lineal sobre ΛV .

1.1. Producto Tensorial y Producto Exterior

1.1.1. Producto Tensorial de Tensores Contravariantes

Definición 22 Sea $v, w \in V$ y $\rho, \sigma \in V^*$, se define el producto tensorial de v con w como:

$$V^2 \ni (v, w) \longmapsto v \otimes w \in T_2V,$$

tal que

$$v \otimes w (\rho, \sigma) = \rho(v) \sigma(w).$$

Proposición 23 El producto tensorial de vectores es bilineal, esto es si $v, w \in V$, $\rho, \rho_1, \rho_2, \sigma, \sigma_1, \sigma_2 \in V^*$ y $c \in \mathbb{R}$, entonces

- i) $(v \otimes w) (\rho_1 + \rho_2, \sigma) = (v \otimes w) (\rho_1, \sigma) + (v \otimes w) (\rho_2, \sigma)$
- ii) $(v \otimes w) (\rho, \sigma_1 + \sigma_2) = (v \otimes w) (\rho, \sigma_1) + (v \otimes w) (\rho, \sigma_2)$
- iii) $(v \otimes w) (c\rho, \sigma) = c(v \otimes w) (\rho, \sigma)$
- iv) $(v \otimes w) (\rho, c\sigma) = c(v \otimes w) (\rho, \sigma)$.

Proposición 24 El producto tensorial de vectores es distributivo con respecto a la adición.

Demostración. Si $v, w, u \in V$, entonces

$$\begin{aligned} (v \otimes (u + w)) (\alpha, \beta) &= \alpha(v) \beta(u + w) \\ &= \alpha(v) (\beta(u) + \beta(w)) \\ &= \alpha(v) \beta(u) + \alpha(v) \beta(w) \\ &= (v \otimes u) (\alpha, \beta) + (v \otimes w) (\alpha, \beta) \\ &= (v \otimes u + v \otimes w) (\alpha, \beta) \end{aligned}$$

esto es $v \otimes (u + w) = v \otimes u + v \otimes w$. ■

Definición 25 El producto tensorial de $s \in T_kV$ por $t \in T_lV$ se define como:

$$T_kV \times T_lV \ni (s, t) \longmapsto s \otimes t \in T_{k+l}V$$

tal que

$$s \otimes t : \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{k \text{ veces}} \times \underbrace{V^* \times \dots \times V^*}_{l \text{ veces}} \longrightarrow \mathbb{R}$$

donde

$$(s \otimes t) (\rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) = s(\rho_1, \dots, \rho_k) t(\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}).$$

con $\rho_1, \dots, \rho_k, \dots, \rho_{k+l} \in V^*$.

Proposición 26 *El producto tensorial es distributivo, esto es si $s \in T_k V$, $t \in T_l V$ y $r \in T_l V$, entonces*

$$\begin{aligned} i) \quad & s \otimes (t + r) = (s \otimes t) + (s \otimes r) \\ ii) \quad & (t + r) \otimes s = (t \otimes s) + (r \otimes s) \end{aligned}$$

Demostración. Demostraremos sólo la distributividad a la derecha, la distributividad a la izquierda es similar, sean $\rho_1, \dots, \rho_k, \dots, \rho_{k+l} \in V^*$, entonces

$$\begin{aligned} & (s \otimes (t + r)) (\rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) \\ &= s (\rho_1, \dots, \rho_k) (t + r) (\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) \\ &= s (\rho_1, \dots, \rho_k) [t (\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) + r (\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l})] \\ &= s (\rho_1, \dots, \rho_k) t (\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) + s (\rho_1, \dots, \rho_k) r (\rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) \\ &= s \otimes t (\rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}) + s \otimes r (\rho_1, \dots, \rho_k, \rho_{k+1}, \dots, \rho_{k+l}), \end{aligned}$$

luego

$$s \otimes (t + r) = (s \otimes t) + (s \otimes r).$$

■

Proposición 27 *Si $\dim V = n$, entonces $\dim T_k V = \dim T_k V = n^k$.*

Demostración. Sea $\{e_i\}$ una base de V y $\{\varepsilon^i\}$ su base dual, demostraremos que $\{e_{i_1} \otimes e_{i_2} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$ es una base para $T_k V$, con $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$, de donde el resultado.

a) Observe que si $\tau^p \in V^*$, entonces $\tau^p = a_i^p \varepsilon^i$, luego

$$\tau^p (e_j) = a_i^p \varepsilon^i (e_j) = a_i^p \delta_j^i = a_j^p \implies \tau^p = \tau^p (e_i) \varepsilon^i.$$

Por otro lado, si $\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^k \in V^*$ y sea $A \in T_k V$, entonces

$$\begin{aligned} A (\tau^1, \tau^2, \dots, \tau^k) &= A (\tau^1 (e_{i_1}) \varepsilon^{i_1}, \dots, \tau^k (e_{i_k}) \varepsilon^{i_k}) \\ &= A (\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_k}) \tau^1 (e_{i_1}) \dots \tau^k (e_{i_k}) \\ &= A^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} (\tau^1, \dots, \tau^k), \end{aligned}$$

de donde $A = A^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$, luego $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$ genera a $T_k V$.

b) Además $\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}\}$ es linealmente independiente, en efecto si $B^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} = 0$, entonces

$$B^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k} (\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_k}) = 0,$$

lo cual implica

$$B^{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{j_1} (e_{i_1}) \dots \varepsilon^{j_k} (e_{i_k}) = B^{i_1 \dots i_k} \delta_{i_1}^{j_1} \dots \delta_{i_k}^{j_k} = B^{j_1 \dots j_k} = 0,$$

de donde $e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_k}$ son linealmente independientes. ■

Nota 28 En resumen se puede demostrar que el espacio vectorial de los k -vectores, $T_k V$, dotado del producto tensorial, \otimes , forma un álgebra asociativa, llamada álgebra tensorial. Por otro lado, sabemos que $\Lambda^k V \subseteq T_k V$, de este modo si $\varphi, \psi \in \Lambda^k V$, entonces $\varphi, \psi \in T_k V$ y $\varphi \otimes \psi \in T_{2k} V$, luego cabe preguntarse si $\varphi \otimes \psi \in \Lambda^k V$, la respuesta es no. Así es necesario introducir un nuevo producto que sea una operación interior en ΛV .

1.1.2. Producto Exterior o Producto de Grassmann

Para introducir un producto en el espacio de los k -vectores es necesario definir un operador, llamado operador de anti-simetrización, de modo que al operar dos k -vectores el resultado sea también un k -vector, esto es

$$\Lambda^k V \times \Lambda^l V \ni (\varphi, \psi) \mapsto \varphi \wedge \psi \in \Lambda^{k+l} V.$$

Definición 29 El operador de anti-simetrización

$$\mathcal{A} : T_k V \longrightarrow \Lambda^k V$$

se define como:

i) Si $k = 0$; $\mathcal{A}\alpha = \alpha, \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}.$

ii) Si $k = 1$; $\mathcal{A}v = v, \quad \forall v \in V.$

iii) Si $k \geq 2$; $(\mathcal{A}t)(w_1, \dots, w_k) = \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1, \dots, i_k} t(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}),$

donde $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, k$ y corre la convención de Einstein, es decir suma sobre los índices repetidos.

Nota 30 El símbolo de permutación de orden k , $\varepsilon^{i_1, \dots, i_k}$ es definido como sigue

$$\varepsilon^{i_1, \dots, i_k} = \begin{cases} 1 & \text{Si } i_1, \dots, i_k \text{ es una permutación par de } 1 \dots k \\ -1 & \text{Si } i_1, \dots, i_k \text{ es una permutación impar de } 1 \dots k \\ 0 & \text{Si hay índices repetidos.} \end{cases}$$

Proposición 31 El operador de anti-simetrización \mathcal{A} es lineal.

Demostración. Sean $t, s \in T_k V$, entonces

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(t + s)(w_1, \dots, w_k) &= \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1, \dots, i_k} (t + s)(w_{i_1}, \dots, w_{i_k}) \\ &= \mathcal{A}t(w_1, \dots, w_k) + \mathcal{A}s(w_1, \dots, w_k) \end{aligned}$$

■

Ejemplo 32 Si $k = 2$, entonces

$$\varepsilon^{ij} = \begin{cases} 1 & \text{Si } ij \text{ es una permutación par de } 12 \\ -1 & \text{Si } ij \text{ es una permutación impar de } 12 \\ 0 & \text{Si hay índices repetidos} \end{cases}$$

Así

$$\varepsilon^{11} = 0 \quad ; \quad \varepsilon^{12} = 1, \quad \varepsilon^{21} = -1 \quad ; \quad \varepsilon^{22} = 0.$$

Si $k = 3$, entonces

$$\varepsilon^{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{Si } ijk \text{ es una permutación par de } 123 \\ -1 & \text{Si } ijk \text{ es una permutación impar de } 123 \\ 0 & \text{Si hay índices repetidos} \end{cases}$$

Así

$$\begin{aligned} \varepsilon^{123} = 1 \quad ; \quad \varepsilon^{231} = 1, \quad \varepsilon^{312} = 1 \quad ; \quad \varepsilon^{213} = -1 \quad ; \quad \varepsilon^{132} = -1, \quad \varepsilon^{321} = -1. \\ \varepsilon^{111} = 0 \quad ; \quad \varepsilon^{222} = 0, \quad \varepsilon^{333} = 0 \quad ; \quad \varepsilon^{122} = 0 = \dots = 0 \quad (3^3 \text{ valores}). \end{aligned}$$

Ejemplo 33 Considere $t \in T_2V$, entonces $\mathcal{A}t \in \Lambda^2V$ se calcula como sigue, dados $\omega_1, \omega_2 \in V^*$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}t)(\omega_1, \omega_2) &= \frac{1}{2!} \varepsilon^{ij} t(\omega_i, \omega_j) \\ &= \frac{1}{2} [t(\omega_1, \omega_2) - t(\omega_2, \omega_1)], \end{aligned} \tag{1.6}$$

$\mathcal{A}t$ se dice el anti-simetrizado de t . Observe que si $t \in \Lambda^2V$, esto es $t(\omega_1, \omega_2) = -t(\omega_2, \omega_1)$, entonces

$$(\mathcal{A}t)(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{2} [t(\omega_1, \omega_2) + t(\omega_1, \omega_2)] = t(\omega_1, \omega_2),$$

por lo tanto $\mathcal{A}t = t$.

Ahora considere $t \in T_3V$, entonces $\mathcal{A}t \in \Lambda^3V$ se calcula como sigue, dados $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in V^*$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}t)(\omega_1, \omega_2, \omega_3) &= \frac{1}{3!} \varepsilon^{ijk} t(\omega_i, \omega_j, \omega_k) \\ &= \frac{1}{6} [t(\omega_1, \omega_2, \omega_3) + t(\omega_2, \omega_3, \omega_1) + t(\omega_3, \omega_1, \omega_2) \\ &\quad - t(\omega_2, \omega_1, \omega_3) - t(\omega_1, \omega_3, \omega_2) - t(\omega_3, \omega_2, \omega_1)] \end{aligned}$$

$\mathcal{A}t$ se dice el anti-simetrizado de t .

Definición 34 Sean $X_p \in \Lambda^pV$ e $Y_q \in \Lambda^qV$, se define el producto exterior o producto de Grassmann entre X_p e Y_q como

$$X_p \wedge Y_q = \frac{(p+q)!}{p!q!} \mathcal{A}(X_p \otimes Y_q) \in \Lambda^{p+q}V. \tag{1.7}$$

Ejemplo 35 1) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha \wedge \beta = \frac{(0+0)!}{0!0!} \mathcal{A}(\alpha \otimes \beta) = 1\mathcal{A}(\alpha\beta) = \alpha\beta.$$

2) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X_q \in \Lambda^q V$, entonces

$$\alpha \wedge X_q = \frac{(0+q)!}{0!q!} \mathcal{A}(\alpha \otimes X_q) = \mathcal{A}(\alpha X_q) = \alpha \mathcal{A}(X_q) = \alpha X_q.$$

3) Si $v, w \in V$, entonces

$$v \wedge w = \frac{(1+1)!}{1!1!} \mathcal{A}(v \otimes w) = 2\mathcal{A}(v \otimes w). \quad (1.8)$$

Por otro lado, si $\rho_1, \rho_2 \in V$ y usando (1.6) tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{A}(v \otimes w)(\rho_1, \rho_2) &= \frac{1}{2} [(v \otimes w)(\rho_1, \rho_2) - (v \otimes w)(\rho_2, \rho_1)] \\ &= \frac{1}{2} [(v \otimes w)(\rho_1, \rho_2) - \rho_2(v) \rho_1(w)] \\ &= \frac{1}{2} [(v \otimes w)(\rho_1, \rho_2) - \rho_1(w) \rho_2(v)] \\ &= \frac{1}{2} [(v \otimes w)(\rho_1, \rho_2) - (w \otimes v)(\rho_1, \rho_2)] \\ &= \frac{1}{2} [(v \otimes w) - (w \otimes v)](\rho_1, \rho_2) \end{aligned}$$

de donde $\mathcal{A}(v \otimes w) = \frac{1}{2} [(v \otimes w) - (w \otimes v)]$. Luego de (1.8) tenemos que

$$v \wedge w = v \otimes w - w \otimes v.$$

En general, se puede demostrar que $\mathcal{A}(\mathcal{A}t \otimes u) = \mathcal{A}(t \otimes \mathcal{A}u) = \mathcal{A}(t \otimes u)$ de lo cual resulta que

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \varepsilon^{j_1 \dots j_k} v_{j_1} \otimes \dots \otimes v_{j_k}.$$

Teorema 36

a) Ley distributiva: $\forall V_p, W_p \in \Lambda^p V$ y $X_q, Y_q \in \Lambda^q V$,

$$(V_p + W_p) \wedge X_q = V_p \wedge X_q + W_p \wedge X_q \quad (1.9)$$

$$V_p \wedge (X_q + Y_q) = V_p \wedge X_q + V_p \wedge Y_q. \quad (1.10)$$

b) Ley asociativa: $\forall X_p \in \Lambda^p V, Y_q \in \Lambda^q V$ y $Z_r \in \Lambda^r V$,

$$(X_p \wedge Y_q) \wedge Z_r = X_p \wedge (Y_q \wedge Z_r). \quad (1.11)$$

c) $\forall X_p \in \Lambda^p V, Y_q \in \Lambda^q V$,

$$X_p \wedge Y_q = (-1)^{pq} Y_q \wedge X_p. \quad (1.12)$$

1.1.3. Producto Exterior de Multivectores

Definición 37 Sean $X, Y \in \Lambda V$, se define el producto exterior de X por Y , denotado por $X \wedge Y$, por

$$X \wedge Y = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k \tau_k (\pi_j (X) \wedge \pi_{k-j} (Y)). \quad (1.13)$$

Nota 38 En la definición anterior aparece el producto exterior de j -vectores por $(k-j)$ -vectores, como definidos por la ec. (1.7), lo cual significa que

$$\pi_k (X \wedge Y) = \sum_{j=0}^k \pi_j (X) \wedge \pi_{k-j} (Y), \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, n \quad (1.14)$$

y si $X = (X_0, \dots, X_k, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_0, \dots, Y_k, \dots, Y_n)$, entonces

$$X \wedge Y = \left(X_0 Y_0, \dots, \sum_{j=0}^k X_j \wedge Y_{k-j}, \dots, \sum_{j=0}^n X_j \wedge Y_{n-j} \right). \quad (1.15)$$

Este producto exterior es una ley interna de ΛV .

Con el objetivo de probar que el producto exterior, definido por la ec. (1.13), satisface la ley de asociatividad tendremos en cuenta la siguiente igualdad

$$\sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j X_i \wedge (Y_{j-i} \wedge Z_{k-j}) = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} X_j \wedge (Y_i \wedge Z_{k-j-i}),$$

y la ec. (1.10). Así, usando la ec. (1.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \pi_k ((X \wedge Y) \wedge Z) &= \sum_{j=0}^k \pi_j (X \wedge Y) \wedge \pi_{k-j} (Z) = \sum_{j=0}^k \left(\sum_{i=0}^j X_i \wedge Y_{j-i} \right) \wedge Z_{k-j} \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j (X_i \wedge Y_{j-i}) \wedge Z_{k-j} = \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^j X_i \wedge (Y_{j-i} \wedge Z_{k-j}) \\ &= \sum_{j=0}^k \sum_{i=0}^{k-j} X_j \wedge (Y_i \wedge Z_{k-j-i}) = \sum_{j=0}^k X_j \wedge \left(\sum_{i=0}^{k-j} Y_i \wedge Z_{k-j-i} \right) \\ &= \sum_{j=0}^k X_j \wedge \pi_{k-j} (Y \wedge Z) = \pi_k (X \wedge (Y \wedge Z)). \end{aligned}$$

Las leyes distributivas a la derecha e izquierda son consecuencias de las ecs. (1.9) y (1.10) respectivamente.

El espacio de multivectores ΛV dotado con este producto exterior es un álgebra asociativa, llamado álgebra exterior de multivectores.

1.2. Estructuras Métricas

Dotemos a V , el cual sigue siendo un espacio vectorial real de dimensión finita, con un tensor métrico g , es decir con un 2-tensor covariante simétrico y no degenerado, esto es una aplicación bilineal $g : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$g(v, w) = g(w, v) \quad \text{para todo } v, w \in V. \quad (1.16)$$

$$\text{Si } g(v, w) = 0 \quad \text{para todo } w \in V, \text{ entonces } v = 0. \quad (1.17)$$

El par (V, g) es llamado una estructura métrica para V y es usual escribir

$$g(v, w) = v \cdot w, \quad (1.18)$$

a lo cual se le llama producto escalar de los vectores $v, w \in V$.

Sea $\{e_k\}$ una base para V y $\{\varepsilon^k\}$ su base dual para V^* . Como es conocido, $\{\varepsilon^k\}$ es la única base de V^* tal que $\varepsilon^k(e_j) = \delta_j^k$.

Nota 39 Observe que si $v \in V$, entonces $v = v^k e_k$, luego

$$\varepsilon^j(v) = \varepsilon^j(v^k e_k) = v^k \varepsilon^j(e_k) = v^k \delta_k^j = v^j,$$

de donde, podemos escribir $v = \varepsilon^k(v) e_k$.

Dado $g_{jk} = g(e_j, e_k)$, y como sabemos por definición g es no degenerado, se sigue que $\det[g_{jk}] \neq 0$. Entonces, existe la matriz inversa de $[g_{jk}]$, digamos $[g^{jk}]$, con entradas g^{jk} , tal que $g^{ks} g_{sj} = g_{js} g^{sk} = \delta_j^k$.

Definición 40 Sean $\omega, \sigma \in V^*$, se define el producto escalar de ω con σ por

$$g^*(\omega, \sigma) = \omega \cdot \sigma = g^{ij} \omega(e_i) \sigma(e_j) \quad (1.19)$$

donde $g^{ks} g_{sj} = g_{js} g^{sk} = \delta_j^k$.

Nota 41 Observe que g^{ij} depende de la base $\{e_k\}$. Es decir, si tenemos otra base, digamos $\{\bar{e}_k\}$, entonces $\bar{g}_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j)$ es tal que

$$\begin{aligned} \bar{g}^{is} \bar{g}_{sj} &= \delta_j^i \\ \bar{g}_{is} \bar{g}^{sj} &= \delta_i^j. \end{aligned}$$

Sin embargo $g^*(\omega, \sigma) = \omega \cdot \sigma = g^{ij} \omega(e_i) \sigma(e_j)$ no depende de la elección de la base $\{e_k\}$. Antes de probar este hecho, probaremos algunos resultados

Proposición 42 Sea $\{e_i\}$ una base de V y sea $\{\varepsilon^i\}$ su base dual, entonces

$$g^*(\varepsilon^j, \varepsilon^k) = g^{jk} \quad (1.20)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} g^* (\varepsilon^j, \varepsilon^k) &= g^{pq} \varepsilon^j \otimes \varepsilon^k (e_p, e_q) \\ &= g^{pq} \varepsilon^j (e_p) \varepsilon^k (e_q) \\ &= g^{pq} \delta_p^j \delta_q^k = g^{jk} \end{aligned}$$

■

Teorema 43 a) Dada un base $\{e_i\}$ de V , existe una única base $\{e^i\}$ de V , tal que $g(e_j, e^k) = \delta_j^k$. La base $\{e^i\}$ es llamada la base recíproca de $\{e_i\}$ con respecto a la métrica g .

b) Dada un base $\{\varepsilon^i\}$ de V^* , existe una única base $\{\varepsilon_i\}$ de V^* , tal que $g^*(\varepsilon^j, \varepsilon_k) = \delta_k^j$. La base $\{\varepsilon_i\}$ es llamada la base recíproca de $\{\varepsilon^i\}$ con respecto a la métrica g^* .

Demostración. Basta definir

$$e^k = g^*(\varepsilon^k, \varepsilon^s) e_s \quad ; \quad \varepsilon_k = g(e_k, e_s) \varepsilon^s \quad (1.21)$$

y observar que $e^k = g^{ks} e_s$ y $\varepsilon_k = g_{ks} \varepsilon^s$ donde $g^{ks} g_{sj} = \delta_j^k$ y $g_{js} g^{sk} = \delta_j^k$. Entonces,

$$\begin{aligned} g(e_j, e^k) &= g(e_j, g^{ks} e_s) = g^{ks} g(e_j, e_s) \\ &= g^{ks} g_{js} = g^{ks} g_{sj} = \delta_j^k, \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} g^*(\varepsilon^j, \varepsilon_k) &= g^*(\varepsilon^j, g_{ks} \varepsilon^s) = g_{ks} g^*(\varepsilon^j, \varepsilon^s) \\ &= g_{ks} g^{js} = g_{ks} g^{sj} = \delta_k^j. \end{aligned}$$

■

1.2.1. Componentes Métricas de Vectores y Formas

Sea $v \in V$, si $\{e_i\}$ es una base de V y $\{\varepsilon^i\}$ su base dual, sabemos que v se puede escribir como $v = \varepsilon^k(v) e_k$, independiente si V posee métrica o no. Suponga que dotamos a V con la métrica g , de modo que $\{e_i\}$ sea una base ortonormal, entonces

$$v = v^i e_i \quad ; \quad \text{donde los coeficientes } v^i \text{ son únicos,}$$

de donde

$$\begin{aligned} g(v, e^k) &= g(v^i e_i, e^k) \\ &= v^i g(e_i, e^k) = v^i \delta_i^k = v^k. \end{aligned}$$

Así,

$$v = g(v, e^k) e_k. \quad (1.22)$$

De la misma forma, podemos escribir $v \in V$, en término de la base recíproca $\{e^i\}$ de $\{e_i\}$, esto es

$$v = v_i e^i \quad ; \quad \text{donde los coeficientes } v_i \text{ son únicos,}$$

de donde

$$\begin{aligned} g(v, e_k) &= g(v_i e^i, e_k) \\ &= v_i g(e^i, e_k) = v_i \delta_k^i = v_k. \end{aligned}$$

Así,

$$v = g(v, e_k) e^k. \quad (1.23)$$

Definición 44 a $v^k = g(v, e^k)$ se le llama forma métrica de las componentes contravariantes de v y a $v_k = g(v, e_k)$, se le llama forma métrica de las componentes covariantes de v .

Sea $\omega \in V^*$, si $\{\varepsilon^i\}$ es una base de V^* y $\{\varepsilon_i\}$ su base recíproca con respecto a la métrica g^* , entonces

$$\omega = \omega_i \varepsilon^i \quad ; \quad \text{donde los } \omega_i \text{ existen y son únicos,}$$

de donde,

$$\begin{aligned} g^*(\omega, \varepsilon_k) &= g^*(\omega_i \varepsilon^i, \varepsilon_k) \\ &= \omega_i g^*(\varepsilon^i, \varepsilon_k) = \omega_i \delta_k^i = \omega_k. \end{aligned}$$

Así,

$$\omega = g^*(\omega, \varepsilon_k) \varepsilon^k. \quad (1.24a)$$

De la misma forma, podemos escribir

$$\omega = g^*(w, \varepsilon^k) \varepsilon_k. \quad (1.25)$$

Definición 45 a $\omega_k = g^*(\omega, \varepsilon_k)$ se le llama forma métrica de las componentes covariantes de ω y a $\omega^k = g^*(\omega, \varepsilon^k) \varepsilon_k$, se le llama forma métrica de las componentes contravariantes de ω

Proposición 46 Sean $\{e_i\}$, $\{\bar{e}_i\}$ dos bases distintas de V y $\{\varepsilon^i\}$, $\{\bar{\varepsilon}^i\}$ sus respectivas bases duales, entonces

$$\bar{g}_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) = \varepsilon^p \otimes \varepsilon^q (\bar{e}_i, \bar{e}_j) g(e_p, e_q) = \varepsilon^p \otimes \varepsilon^q (\bar{e}_i, \bar{e}_j) g_{pq}. \quad (1.26)$$

y

$$\bar{g}^{ij} = g(\bar{\varepsilon}^i, \bar{\varepsilon}^j) = \bar{\varepsilon}^i \otimes \bar{\varepsilon}^j (e_p, e_q) g(\varepsilon^p, \varepsilon^q) = \bar{\varepsilon}^i \otimes \bar{\varepsilon}^j (e_p, e_q) g^{pq}. \quad (1.27)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} \bar{g}_{ij} = g(\bar{e}_i, \bar{e}_j) &= g(\varepsilon^p (\bar{e}_i) e_p, \varepsilon^q (\bar{e}_j) e_q) \\ &= \varepsilon^p (\bar{e}_i) \varepsilon^q (\bar{e}_j) g(e_p, e_q) \\ &= \varepsilon^p \otimes \varepsilon^q (\bar{e}_i, \bar{e}_j) g_{pq}. \end{aligned}$$

De la misma forma se prueba que

$$\bar{g}^{ij} = \bar{\varepsilon}^i \otimes \bar{\varepsilon}^j (e_p, e_q) g^{pq}.$$

■

Proposición 47 La matriz $[\bar{g}^{ij}]$ es la inversa de la matriz $[\bar{g}_{ij}]$.

Demostración.

$$\begin{aligned}
\bar{g}^{is}\bar{g}_{sj} &= (\bar{\varepsilon}^i \otimes \bar{\varepsilon}^s (e_p, e_q) g^{pq}) (\varepsilon^k \otimes \varepsilon^l (\bar{e}_s, \bar{e}_j) g_{kl}) \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \bar{\varepsilon}^s (e_q) \varepsilon^k (\bar{e}_s) \varepsilon^l (\bar{e}_j) g^{pq} g_{kl} \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \varepsilon^k (\bar{\varepsilon}^s (e_q) \bar{e}_s) \varepsilon^l (\bar{e}_j) g^{pq} g_{kl} \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \varepsilon^k (e_q) \varepsilon^l (\bar{e}_j) g^{pq} g_{kl} \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \delta_q^k \varepsilon^l (\bar{e}_j) g^{pq} g_{kl} \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \varepsilon^l (\bar{e}_j) g^{pk} g_{kl} \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \varepsilon^l (\bar{e}_j) \delta_l^p = \bar{\varepsilon}^i (e_p) \varepsilon^p (\bar{e}_j) \\
&= \bar{\varepsilon}^i (\varepsilon^p (\bar{e}_j) e_p) = \bar{\varepsilon}^i (\bar{e}_j) = \delta_j^i
\end{aligned}$$

de donde $[\bar{g}^{is}]$ es la matriz inversa a la izquierda de $[\bar{g}_{sj}]$. Demostrar que $[\bar{g}^{sj}]$ es la matriz inversa a la derecha de $[\bar{g}_{sj}]$ se hace en forma similar. ■

Ahora estamos en condiciones de demostrar que $g^*(\omega, \sigma) = \omega \cdot \sigma = g^{ij} \omega(e_i) \sigma(e_j)$ no depende de la elección de la base $\{e_k\}$. En efecto, sean $\{e_k\}$ y $\{\bar{e}_k\}$ dos bases para V , entonces si $\sigma, \omega \in V^*$ y usando la identidad (1.27), tenemos

$$\begin{aligned}
g^*(\omega, \sigma) = \omega \cdot \sigma &= \bar{g}^{ij} \omega(\bar{e}_i) \sigma(\bar{e}_j) \\
&= \bar{\varepsilon}^i \otimes \bar{\varepsilon}^j (e_p, e_q) g^{pq} \omega(\bar{e}_i) \sigma(\bar{e}_j) \\
&= \bar{\varepsilon}^i (e_p) \bar{\varepsilon}^j (e_q) \omega(\bar{e}_i) \sigma(\bar{e}_j) g^{pq} \\
&= \omega(\bar{\varepsilon}^i (e_p) \bar{e}_i) \sigma(\bar{\varepsilon}^j (e_q) \bar{e}_j) g^{pq} \\
&= \omega(e_p) \sigma(e_q) g^{pq} = g^*(\omega, \sigma).
\end{aligned}$$

Nota 48 Notemos que de la ecuación (1.21) $\varepsilon_k = g(e_k, e_s) \varepsilon^s = g_{ks} \varepsilon^s$, y $e^k = g^*(\varepsilon^k, \varepsilon^s) e_s = g^{ks} e_s$ para todo $k = 1, \dots, n$, con $g^*(\varepsilon_j, \varepsilon^k) = \delta_j^k$ y $g(e^k, e_j) = \delta_j^k$. Luego

$$\begin{aligned}
g^*(\varepsilon_j, \varepsilon_k) &= g^*(g_{js} \varepsilon^s, g_{kp} \varepsilon^p) = g_{js} g_{kp} g^*(\varepsilon^s, \varepsilon^p) \\
&= g_{js} g_{kp} g^{sp} = g_{js} \delta_k^s = g_{jk} = g(e_j, e_k).
\end{aligned} \tag{1.28}$$

De la misma forma

$$g(e^j, e^k) = g^{jk} = g^*(\varepsilon^j, \varepsilon^k). \tag{1.29}$$

Así las igualdades (1.28) y (1.29) se pueden denotar como

$$\varepsilon_j \cdot \varepsilon_k = g_{jk} = e_j \cdot e_k \quad \text{y} \quad e^j \cdot e^k = g^{jk} = \varepsilon^j \cdot \varepsilon^k \tag{1.30}$$

respectivamente.

1.2.2. Algunas relaciones entre tensores métricos

Los tensores métricos, con igual signatura, son relacionados por intermedio de un operador asociado a cada uno de ellos, en lo que sigue definiremos estos operadores y mostraremos estas relaciones. Las relaciones que pasaremos a demostrar juegan un importante rol en Relatividad General y será utilizado en el tercer capítulo de esta monografía.

Sea $\{b_k\}$ una base de V y $\{\beta^k\}$ su base dual, se define la métrica fiducial sobre V asociada a $\{b_k\}$ como

$$b = \sum_{k=1}^n \beta^k \otimes \beta^k.$$

o más general se define la métrica fiducial sobre V de signatura (p, q) como

$$S_{(p,q)} = \sum_{k=1}^p \beta^k \otimes \beta^k - \sum_{k=p+1}^{n=p+q} \beta^k \otimes \beta^k.$$

Ahora consideremos una métrica arbitraria g sobre V , entonces podemos definir un operador $\gamma : V \rightarrow V$, asociado a g , como

$$\gamma(v) = \sum_{k=1}^n g(v, b_k) b_k,$$

tal operador recibe el nombre de operador métrico fiducial asociado a g .

Proposición 49 Para todo $v, w \in V$ se cumple que

$$g(v, w) = b(\gamma(v), w)$$

o en otra notación

$$v \cdot_g w = \gamma(v) \cdot_b w$$

Demostración. En efecto

$$\begin{aligned} g(v, w) &= g\left(v, \sum_{k=1}^n b(b_k, w) b_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^n g(v, b_k) b(b_k, w) \\ &= b\left(\sum_{k=1}^n g(v, b_k) b_k, w\right) \\ &= b(\gamma(v), w). \end{aligned}$$

■

De la misma forma, el operador métrico fiducial σ asociado a $S_{(p,q)}$, se puede definir como

$$\sigma(v) = \sum_{k=1}^n S_{(p,q)}(v, b_k) b_k,$$

observe que

$$\begin{aligned}
 \sigma(v) &= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{k=1}^p \beta^k \otimes \beta^k(v, b_j) - \sum_{k=p+1}^{n=p+q} \beta^k \otimes \beta^k(v, b_j) \right) b_j \\
 &= \sum_{k=1}^p \beta^k(v) b_k - \sum_{k=p+1}^{n=p+q} \beta^k(v) b_k \\
 &= \sum_{j=1}^p b(v, b_k) b_k - \sum_{k=p+1}^{n=p+q} b(v, b_k) b_k.
 \end{aligned}$$

En particular,

$$\sigma(b_k) = \begin{cases} b_k & \text{si } k = 1, \dots, p \\ -b_k & \text{si } k = p+1, \dots, n. \end{cases}$$

Otro importante operador que es fundamental mencionar es el operador adjunto, que a continuación pasamos a definir con el fin de mostrar algunas propiedades del operador asociado a una métrica.

Definición 50 Dado el operador $f \in \mathcal{L}(V)$, se define el operador adjunto de f , denotado por $f^\dagger \in \mathcal{L}(V)$, como el operador tal que $\forall v \in V$

$$\begin{aligned}
 f^\dagger(v) &= \left(f(e^j) \cdot v \right)_g e_j \\
 &= \left(f(e_j) \cdot v \right)_g e^j.
 \end{aligned}$$

Proposición 51 $\forall v, w \in V$ y $f \in \mathcal{L}(V)$ se cumple

$$f^\dagger(v) \cdot w = v \cdot f(w).$$

Demostración. Si $v, w \in V$, entonces

$$\begin{aligned}
 f^\dagger(v) \cdot w &= \left(f(e^j) \cdot v \right)_g e_j \cdot w \\
 &= \left(e_j \cdot w \right)_g f(e^j) \cdot v \\
 &= f \left(\left(e_j \cdot w \right)_g e^j \right) \cdot v \\
 &= f(w) \cdot v = v \cdot f(w).
 \end{aligned}$$

■

Ahora estamos en condiciones de probar que el operador asociado a g , i.e., γ , es autoadjunto. En efecto, sea $v, w \in V$

$$\begin{aligned}
 \gamma^\dagger(v) \cdot w &= v \cdot \gamma(w) = \gamma(w) \cdot v \\
 &= g(w, v) = g(v, w) = \gamma(v) \cdot w.
 \end{aligned}$$

De la misma forma se prueba que el operador σ , asociado a $S_{(p,q)}$ es autoadjunto. También es posible demostrar que si $i_V : V \rightarrow V$ es el operador identidad de V , entonces

$$\sigma^2 = i_V.$$

En efecto, sea $v \in V$, entonces $\sigma^2(v) = \sigma[\sigma(v)]$. Por otro lado,

$$\begin{aligned} \sigma^2(b_k) &= \sigma \left(\begin{cases} b_k, & k = 1, \dots, p \\ -b_k, & k = p+1, \dots, n \end{cases} \right) \\ &= b_k = i_V(b_k), \end{aligned}$$

entonces, colocando $v = \beta^k(v) b_k$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \sigma^2(v) &= \sigma^2(\beta^k(v) b_k) \\ &= \beta^k(v) i_V(b_k) = i_V(\beta^k(v) b_k) = i_V(v), \end{aligned}$$

así,

$$\sigma^2 = i_V.$$

Note que lo anterior es equivalente a colocar

$$\sigma^{-1} = \sigma.$$

Es posible calcular el determinante de un operador asociado a una métrica, tomando en cuenta la siguiente definición.

Definición 52 Sea $\{e_k\}$ una base de V y $\{\varepsilon^k\}$ su base dual. Entonces, si $f \in \mathcal{L}(V)$, el determinante de f es definido por

$$\begin{aligned} \det[f] &= [f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)](\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n) \\ &= (\varepsilon^1 \wedge \dots \wedge \varepsilon^n)[f(e_1), \dots, f(e_n)]. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} \det[f] &= [f(e_1) \wedge \dots \wedge f(e_n)](\varepsilon^1, \dots, \varepsilon^n) \\ &= \det \begin{bmatrix} \varepsilon^1(f(e_1)) & \dots & \varepsilon^1(f(e_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon^n(f(e_1)) & \dots & \varepsilon^n(f(e_n)) \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Proposición 53 El operador asociado a la métrica de signatura (p, q) , $S_{(p,q)}$, tiene determinante $(-1)^q$.

Demostración. Tomemos la base $\{b_k\}$ de V y su base dual $\{\beta^k\}$, entonces de la definición anterior tenemos

$$\det[\sigma] = \det \begin{bmatrix} \beta^1(\sigma(b_1)) & \dots & \beta^1(\sigma(b_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^n(\sigma(b_1)) & \dots & \beta^n(\sigma(b_n)) \end{bmatrix} = (-1)^q$$

■

Proposición 54 *El operador asociado a g tiene determinante no nulo.*

Demostración. Tomando la base $\{b_k\}$ de V y su base dual $\{\beta^k\}$, tenemos

$$\det [\gamma] = \det \begin{bmatrix} \beta^1(\gamma(b_1)) & \cdots & \beta^1(\gamma(b_n)) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta^n(\gamma(b_1)) & \cdots & \beta^n(\gamma(b_n)) \end{bmatrix},$$

por otro lado,

$$\begin{aligned} \beta^j(\gamma(b_k)) &= \beta^j\left(\sum_{l=1}^n g(b_k, b_l) b_l\right) = \sum_{l=1}^n g(b_k, b_l) \beta^j(b_l) \\ &= \sum_{l=1}^n g(b_k, b_l) \delta_l^j = g(b_k, b_j), \end{aligned}$$

así tenemos,

$$\det [\gamma] = \det \begin{bmatrix} g(b_1, b_1) & \cdots & g(b_1, b_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ g(b_n, b_1) & \cdots & g(b_n, b_n) \end{bmatrix} \neq 0.$$

■

También es posible demostrar que una métrica g y su operador asociado γ , tienen los mismos autovalores los cuales son reales y distintos de cero.

Otro importante operador que juega un rol fundamental, cuando aplicamos la presente teoría en relatividad general, es el operador "gauge"fiducial, el cual relaciona los operadores métricos fiduciales de dos métricas de igual signatura.

Sea g una métrica sobre V con signatura (p, q) y γ su operador métrico fiducial con autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ y con correspondientes autovectores $v_1, \dots, v_n \in V$.

Definición 55 *Sea $\{b_k\}$ una base de V , el operador b -Gauge de g es definido como*

$$h(v) = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\lambda_k|} (v \cdot v_k) b_k$$

donde $v \cdot v_k \equiv v \cdot v_k \equiv b(v, v_k)$.

De la definición anterior, podemos ver que el operador adjunto de h , es dado por

$$h^\dagger(v) = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\lambda_k|} (v \cdot b_k) v_k$$

i.e., $h^\dagger \neq h$. En efecto, sean $v, w \in V$ entonces,

$$\begin{aligned} h^\dagger(v) \cdot w &= v \cdot hw = v \cdot \left(\sum_{k=1}^n \sqrt{|\lambda_k|} (w \cdot v_k) b_k \right) \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{|\lambda_k|} (v \cdot b_k) v_k \cdot w, \end{aligned}$$

i.e., $h^\dagger(v) = \sum_{k=1}^n \sqrt{|\lambda_k|} (v \cdot b_k) v_k$.

Proposición 56 *Sea g cualquier métrica de signatura (p, q) , entonces el operador asociado a g , i.e., γ , puede ser escrito en términos del operador σ , asociado a la métrica $S_{(p,q)}$, como*

$$\gamma = h^\dagger \circ \sigma \circ h.$$

Demostración. Sea $v \in V$, calculando directamente tenemos

$$\begin{aligned} h^\dagger \circ \sigma \circ h(v) &= \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \sigma(b_j) \cdot b_k (v \cdot v_j) v_k \\ &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \sigma(b_j) \cdot b_k (v \cdot v_j) v_k \\ &\quad + \sum_{j=1}^p \sum_{k=p+1}^{p+q} \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \sigma(b_j) \cdot b_k (v \cdot v_j) v_k \\ &\quad + \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=1}^p \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \sigma(b_j) \cdot b_k (v \cdot v_j) v_k \\ &= \sum_{j=1}^{p+q} \sum_{k=1}^{p+q} \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \sigma(b_j) \cdot b_k (v \cdot v_j) v_k, \end{aligned}$$

por otro lado, sabemos que

$$\sigma(b_k) = \begin{cases} b_k & k = 1, \dots, p \\ -b_k & k = p+1, \dots, n, \end{cases}$$

luego podemos escribir,

$$\begin{aligned} h^\dagger \circ \sigma \circ h(v) &= \sum_{j=1}^p \sum_{k=1}^p \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \delta_{jk} (v \cdot v_j) v_k + 0 \\ &= \sum_{j=1}^p |\lambda_j| (v \cdot v_j) v_j - \sum_{j=p+1}^{p+q} |\lambda_j| (v \cdot v_j) v_j \\ &\quad + 0 - \sum_{j=p+1}^{p+q} \sum_{k=p+1}^{p+q} \sqrt{|\lambda_j \lambda_k|} \delta_{jk} (v \cdot v_j) v_k \\ &= \sum_{j=1}^p \lambda_j (v \cdot v_j) v_j + \sum_{j=p+1}^{p+q} \lambda_j (v \cdot v_j) v_j \\ &= \sum_{j=1}^n \lambda_j (v \cdot v_j) v_j. \end{aligned}$$

Pero, $\gamma(v_j) = \lambda_j v_j \forall j = 1, \dots, n, j = 1, \dots, n$,

$$h^\dagger \circ \sigma \circ h(v) = \sum_{j=1}^n (v \cdot v_j) \gamma(v_j) = \gamma \left(\sum_{j=1}^n (v \cdot v_j) v_j \right) = \gamma(v),$$

i.e., $h^\dagger \circ \sigma \circ h = \gamma$. ■

Nota 57 De lo anterior se observa la siguiente relación entre los determinantes

$$\begin{aligned}\det[\gamma] &= \det[h^\dagger] \det[\sigma] \det[h] = \\ \det[\sigma] (\det[h])^2 &= (-1)^q (\det[h])^2.\end{aligned}$$

Finalmente podemos enunciar el siguiente teorema relacionando las métricas de igual signatura.

Teorema 58 Sea g cualquier métrica con signatura (p, q) sobre V , entonces $\forall v, w \in V$

$$g(v, w) = S_{(p,q)}(h(v), h(w))$$

Demostración. Como $\gamma(v) = h^\dagger \circ \sigma \circ h(v)$,

$$\begin{aligned}g(v, w) = \gamma(v) \cdot w &= h^\dagger \circ \sigma \circ h(v) \cdot w \\ &= \sigma \circ h(v) \cdot h(w) \\ &= \sigma[h(v)] \cdot h(w),\end{aligned}$$

esto es $g(v, w) = S_{(p,q)}(h(v), h(w))$. ■

1.2.3. Producto Escalar de p -Vectores

Consideremos ahora, un p -vector $X \in \bigwedge^p V$, con $p \geq 2$. Entonces podemos escribir X en términos de la siguiente fórmula de expansión

$$X = \frac{1}{p!} X_{j_1 \dots j_p} e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p}, \quad (1.31)$$

donde $X_{j_1 \dots j_p} = X(\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_p})$ son las j_1, \dots, j_p -componentes covariantes de X con respecto a la p -base tensorial $\{e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p}\}$ con $j_1, \dots, j_p = 1, \dots, n$.

A continuación, obtendremos una relación entre las $i_1 \dots i_p$ -componentes covariantes de X y las j_1, \dots, j_p -componentes contravariantes. Para ello, podemos usar las ecuaciones (1.25) y (1.30), de donde

$$\begin{aligned}X(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p}) &= X(e_{i_1} \cdot e_{s_1} \varepsilon^{s_1}, \dots, e_{i_p} \cdot e_{s_p} \varepsilon^{s_p}) \\ &= X(\varepsilon^{s_1}, \dots, \varepsilon^{s_p}) (e_{i_1} \cdot e_{s_1}) \dots (e_{i_p} \cdot e_{s_p}) \\ &= \frac{1}{p!} X(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_p}) \delta_{j_1 \dots j_p}^{s_1 \dots s_p} (e_{i_1} \cdot e_{s_1}) \dots (e_{i_p} \cdot e_{s_p}),\end{aligned}$$

así

$$X_{i_1 \dots i_p} = \frac{1}{p!} X^{j_1 \dots j_p} \det \begin{bmatrix} e_{i_1} \cdot e_{j_1} & \dots & e_{i_1} \cdot e_{j_p} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{i_p} \cdot e_{j_1} & \dots & e_{i_p} \cdot e_{j_p} \end{bmatrix}. \quad (1.32)$$

Dado que hemos definido una estructura métrica (V, g) , podemos ahora dotar $\bigwedge^p V$ con un producto escalar de p -vectores, de modo que por extensión podremos también dotar al espacio de los multivectores $\bigwedge V$ de un producto escalar.

El producto escalar de $X_p, Y_p \in \bigwedge^p V$, en realidad $X_p \cdot Y_p \in \mathbb{R}$, es definido por los siguientes axiomas:

Ax-i Para todo $a, \beta \in \mathbb{R}$:

$$\alpha \cdot \beta = \alpha\beta \quad \text{producto real de } \alpha \text{ y } B. \quad (1.33)$$

Ax-ii Para todo $X_p, Y_p \in \wedge^p V$, con $p \geq 1$:

$$\begin{aligned} X_p \cdot Y_p &= \frac{1}{p!} X_p(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_p}) Y_p(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p}) \\ &= \frac{1}{p!} X_p(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_p}) Y_p(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_p}), \end{aligned} \quad (1.34)$$

donde $\{\varepsilon_i\}$ es la base recíproca de $\{\varepsilon^i\}$.

Es fácil verificar que el número real definido por la ecuación (1.34) no depende de las bases $\{\varepsilon_i\}$ y $\{\varepsilon^i\}$. En efecto, usando las fórmulas de expansión para 1-forma, $\omega = \omega \cdot \varepsilon_j \varepsilon^j$, y tomando un par de bases recíprocas $\{\varepsilon'^i\}$ y $\{\varepsilon'_i\}$ tenemos

$$\begin{aligned} &X_p(\varepsilon^{i_1'}, \dots, \varepsilon^{i_p'}) Y_p(\varepsilon'_{i_1}, \dots, \varepsilon'_{i_p}) \\ &= X_p(\varepsilon^{i_1'} \cdot \varepsilon_{j_1} \varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{i_p'} \cdot \varepsilon_{j_p} \varepsilon^{j_p}) Y_p(\varepsilon'_{i_1}, \dots, \varepsilon'_{i_p}) \\ &= X_p(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_p}) Y_p(\varepsilon_{j_1} \cdot \varepsilon^{i_1'} \varepsilon'_{i_1}, \dots, \varepsilon_{j_p} \cdot \varepsilon^{i_p'} \varepsilon'_{i_p}) \\ &= X_p(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_p}) Y_p(\varepsilon_{j_1}, \dots, \varepsilon_{j_p}). \end{aligned}$$

Así, el producto escalar sobre $\wedge^p V$ está bien definido, ya que es simétrico, satisface las leyes distributivas, cumple la asociatividad mixta y es no degenerado, es decir si $X_p \cdot Y_p = 0$ para todo Y_p , entonces $X_p = 0$.

Probaremos sólo la propiedad de no degeneración. Elijamos, sin pérdida de generalidad, $Y_p \equiv e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p}$. Luego, debemos probar que si $X_p \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p}) = 0$, entonces $X_p = 0$.

Usando la ecuación (1.31), la condición de dualidad de $\{e^k\}$ y $\{\varepsilon_k\}$, y tomando en cuenta la ecuación (1.32), tenemos que

$$\begin{aligned} X_p \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_p}) = 0 &\implies \frac{1}{p!} X_p(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_p}) \delta_{s_1 \dots s_p}^{j_1 \dots j_p} \varepsilon_{i_1}(e^{s_1}) \dots \varepsilon_{i_p}(e^{s_p}) = 0 \\ &\implies \frac{1}{p!} X_p(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_p}) \delta_{s_1 \dots s_p}^{j_1 \dots j_p} \delta_{i_1}^{s_1} \dots \delta_{i_p}^{s_p} = 0 \\ &\implies X_p(\varepsilon^{j_1}, \dots, \varepsilon^{j_p}) = 0, \end{aligned}$$

es decir, $X_p = 0$.

Para el caso especial de vectores la ecuación (1.34) se reduce a

$$v \cdot w = \varepsilon^i(v) \varepsilon_i(w) = \varepsilon_i(v) \varepsilon^i(w), \quad (1.35)$$

esto es, $g = \varepsilon^i \otimes \varepsilon_i = \varepsilon_i \otimes \varepsilon^i$.

Note que la ecuación (1.35) es consistente con la ecuación (1.18). En realidad tenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon^i(v) \varepsilon_i(w) &= \varepsilon^i(v) g_{ij} \varepsilon_j(w) = \varepsilon^i(v) g(e_i, e_j) \varepsilon_j(w) \\ &= g(\varepsilon^i(v) e_i, \varepsilon_i(w) e_j) = g(v, w).\end{aligned}$$

Lema 59 De la ecuación (1.34) se puede obter la fórmula

$$(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_k) = \det \begin{bmatrix} v_1 \cdot w_1 & \dots & v_1 \cdot w_k \\ \dots & \dots & \dots \\ v_k \cdot w_1 & \dots & v_k \cdot w_k \end{bmatrix}, \quad (1.36)$$

la cual es la conocida fórmula de producto escalar de k -vectores.

Demostración. Usando las ecuaciones (1.34) y (1.35) y recordando la fórmula del determinante de $k \times k$ $\det [a_{ij}] = \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{j_1 \dots j_k} a_{i_1 j_1} \dots a_{i_k j_k}$. Un cálculo directo da

$$\begin{aligned}(v_1 \wedge \dots \wedge v_k) \cdot (w_1 \wedge \dots \wedge w_k) &= \frac{1}{k!} v_1 \wedge \dots \wedge v_k (\varepsilon^{s_1}, \dots, \varepsilon^{s_k}) w_1 \wedge \dots \wedge w_k (\varepsilon_{s_1}, \dots, \varepsilon_{s_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{s_1} (v_{i_1}) \dots \varepsilon^{s_k} (v_{i_k}) \varepsilon^{j_1 \dots j_k} \varepsilon_{s_1} (w_{j_1}) \dots \varepsilon_{s_k} (w_{j_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{j_1 \dots j_k} \varepsilon^{s_1} (v_{i_1}) \varepsilon_{s_1} (w_{j_1}) \dots \varepsilon^{s_k} (v_{i_k}) \varepsilon_{s_k} (w_{j_k}) \\ &= \frac{1}{k!} \varepsilon^{i_1 \dots i_k} \varepsilon^{j_1 \dots j_k} (v_{i_1} \cdot w_{j_1}) \dots (v_{i_k} \cdot w_{j_k}), \\ &= \det [v_i \cdot w_j].\end{aligned}$$

Ahora, podemos generalizar las ecuaciones (1.22) y (1.23) de modo a obtener una fórmula de expansión de k -vectores. ■

Lema 60 Para todo $X \in \bigwedge^k V$ se cumplen dos fórmulas de expansiones

$$\begin{aligned}X &= \frac{1}{k!} X \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}) (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) \\ &= \frac{1}{k!} X \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k}) (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k})\end{aligned} \quad (1.37)$$

Demostración. Para $X \in \bigwedge^k V$ con $k \geq 2$, y recordando las ecuaciones (1.32) y (1.31) existen números reales únicos $X^{i_1 \dots i_k}$ y $X_{i_1 \dots i_k}$ con $i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$ tal que

$$X = \frac{1}{k!} X^{i_1 \dots i_k} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k} = \frac{1}{k!} X_{i_1 \dots i_k} e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_k}.$$

En realidad, tomando ** el producto escalar $X \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k})$, obtenemos que

$$\begin{aligned} X \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}) &= \frac{1}{k!} X^{i_1 \dots i_k} (e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_k}) \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k}) \\ &= \frac{1}{k!} X^{i_1 \dots i_k} \det \begin{bmatrix} e_{i_1} \cdot e^{j_1} & \dots & e_{i_1} \cdot e^{j_k} \\ \dots & \dots & \dots \\ e_{i_k} \cdot e^{j_1} & \dots & e_{i_k} \cdot e^{j_k} \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k!} \delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} X^{i_1 \dots i_k} = X^{j_1 \dots j_k}, \end{aligned}$$

es decir, $X^{j_1 \dots j_k} = X \cdot (e^{j_1} \wedge \dots \wedge e^{j_k})$. Análogamente, podemos probar que $X_{j_1 \dots j_k} = X \cdot (e_{j_1} \wedge \dots \wedge e_{j_k})$. ■

1.2.4. Producto Escalar de Multivectores

El producto escalar de $X, Y \in \bigwedge V$, esto es $X \cdot Y \in \mathbb{R}$, es definido por

$$X \cdot Y = \sum_{k=0}^n \pi_k(X) \cdot \pi_k(Y). \quad (1.38)$$

Note que en el lado derecho aparece el producto escalar de k -vectores con $0 \leq k \leq n$, como definido por las ecuaciones (1.33) y (1.34). Esto significa que si $X = (X_0, X_1, \dots, X_n)$ e $Y = (Y_0, Y_1, \dots, Y_n)$, entonces

$$X \cdot Y = \sum_{k=0}^n X_k \cdot Y_k. \quad (1.39)$$

Usando las ecuaciones (1.33) y (1.34) podemos notar que la ecuación (1.38) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= X_0 Y_0 + \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} X_k(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_k}) Y_k(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_k}) \\ &= X_0 Y_0 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} X_k(\varepsilon_{i_1}, \dots, \varepsilon_{i_k}) Y_k(\varepsilon^{i_1}, \dots, \varepsilon^{i_k}). \end{aligned} \quad (1.40)$$

Es importante notar que el producto escalar definido por (1.38) es un producto escalar bien definido sobre $\bigwedge V$. Este es simétrico, satisface las leyes distributivas, tiene la propiedad de asociatividad mixta y es no degenerado, esto es, si $X \cdot Y = 0$ para todo Y , entonces $X = 0$.

** Recuerde que $\delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k}$ es el llamado símbolo de permutación generalizado de orden k .

$$\delta_{i_1 \dots i_k}^{j_1 \dots j_k} = \det \begin{bmatrix} \delta_{i_1}^{j_1} & \dots & \delta_{i_1}^{j_k} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \delta_{i_k}^{j_1} & \dots & \delta_{i_k}^{j_k} \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n. \\ j_1, \dots, j_k = 1, \dots, n. \end{array}$$

Sean $X_p, Y_p \in \bigwedge^p V$. Luego usando las ecuaciones (1.38) y (1.4) obtenemos

$$\begin{aligned} \tau_p(X_p) \cdot \tau_q(Y_q) &= \sum_{k=0}^n \pi_k \circ \tau_p(X_p) \cdot \pi_k \circ \tau_q(Y_q) \\ &= \sum_{k=0}^n \begin{cases} 0_k, & k \neq p \\ X_p, & k = p \end{cases} \cdot \begin{cases} 0_k, & k \neq q \\ Y_q, & k = q \end{cases}. \end{aligned}$$

La suma de la derecha de esta ecuación es $0 = \sum_{k=0}^n 0_k \cdot 0_k$ a menos que exista algún k_0 con $0 \leq k_0 \leq n$ tal que $k_0 = p$ y $k_0 = q$. Obviamente vemos que para $p \neq q$ no existe tal número k_0 que satisfaga las condiciones requeridas. Pero, para $p = q$ trivialmente las satisface. Así, de la ecuación anterior se sigue que

$$\tau_p(X_p) \cdot \tau_q(Y_q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq q \\ X_p \cdot Y_p, & \text{si } p = q \end{cases}. \quad (1.41)$$

1.3. Productos contraídos

Para definir los productos contraídos es necesario introducir el llamado operador de reversión, el cual es definido actuando sobre $\bigwedge^p V$ como sigue:

$$\sim: \bigwedge^p V \rightarrow \bigwedge^p V,$$

tal que $X_p \mapsto \widetilde{X}_p = (-1)^{\frac{1}{2}p(p-1)} X_p$. Aquí \widetilde{X}_p se lee como el reverso de X_p .

El producto contraído a la izquierda de $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $0 \leq p \leq q \leq n$, es decir $X_p \lrcorner Y_q \in \bigwedge^{q-p} V$, es definido por los siguientes axiomas

Ax-i Para todo $X_p, Y_p \in \bigwedge^p V$:

$$X_p \lrcorner Y_p = \widetilde{X}_p \cdot Y_p = X_p \cdot \widetilde{Y}_p. \quad (1.42)$$

Ax-ii Para todo $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p < q$:

$$\begin{aligned} X_p \lrcorner Y_q &= \frac{1}{(q-p)!} \left(\widetilde{X}_p \wedge e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{q-p}} \right) \cdot Y_q e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{q-p}} \\ &= \frac{1}{(q-p)!} \left(\widetilde{X}_p \wedge e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{q-p}} \right) \cdot Y_q e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{q-p}}. \end{aligned} \quad (1.43)$$

El producto contraído a la derecha de $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $n \geq p \geq q \geq 0$, es decir $X_p \rceil Y_q \in \bigwedge^{p-q} V$, es definido por los siguientes axiomas

Ax-i Para todo $X_p, Y_p \in \bigwedge^p V$:

$$X_p \lrcorner Y_p = \widetilde{X}_p \cdot Y_p = X_p \cdot \widetilde{Y}_p. \quad (1.44)$$

Ax-ii Para todo $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p > q$:

$$\begin{aligned} X_p \lrcorner Y_q &= \frac{1}{(p-q)!} X_p \cdot \left(e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{p-q}} \wedge \widetilde{Y}_q \right) e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p-q}} \\ &= \frac{1}{(p-q)!} X_p \cdot \left(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{p-q}} \wedge \widetilde{Y}_q \right) e^{i_1} \wedge \dots \wedge e^{i_{p-q}}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Note que el $(q-p)$ -vector definido por la ec. (1.43) y el $(p-q)$ -vector definido por la ec. (1.45) no dependen sobre la elección de las bases recíprocas $\{e_i\}$ y $\{e^i\}$ usadas para su cálculo.

Tomemos ahora $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p \leq q$. Entonces, para todo $Z_{q-p} \in \bigwedge^{q-p} V$ se cumplen las siguientes identidades

$$(X_p \lrcorner Y_q) \cdot Z_{q-p} = Y_q \cdot \left(\widetilde{X}_p \wedge Z_{q-p} \right). \quad (1.46)$$

Para $p < q$ la ec. (1.46) sigue directamente desde la ec. (1.43) y ec. (1.37). Pero, para $p = q$ esto sigue trivialmente tomando en cuenta la ec.(1.42), etc.

Sean $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p \geq q$. Entonces, para $Z_{p-q} \in \bigwedge^{p-q} V$ se cumple la siguiente identidad

$$(X_p \lrcorner Y_q) \cdot Z_{p-q} = X_p \cdot \left(Z_{p-q} \wedge \widetilde{Y}_q \right). \quad (1.47)$$

Para $p > q$ la ec. (1.47) sigue directamente desde la ec. (1.45) y ec. (1.37). Pero, para $p = q$ esta sigue trivialmente tomando en cuenta la ec. (1.44), etc.

Presentamos ahora, las propiedades elementales de los productos contraídos de p -vectores con q -vectores.

Para todo $V_p, W_p \in \bigwedge^p V$ y $X_q, Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p \leq q$

$$\begin{aligned} (V_p + W_p) \lrcorner X_q &= V_p \lrcorner X_q + W_p \lrcorner X_q, \\ V_p \lrcorner (X_q + Y_q) &= V_p \lrcorner X_q + V_p \lrcorner Y_q \text{ (ley distributiva)}. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Para todo $V_p, W_p \in \bigwedge^p V$ y $X_q, Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p \geq q$

$$\begin{aligned} (V_p + W_p) \lrcorner X_q &= V_p \lrcorner X_q + W_p \lrcorner X_q, \\ V_p \lrcorner (X_q + Y_q) &= V_p \lrcorner X_q + V_p \lrcorner Y_q \text{ (ley distributiva)}. \end{aligned} \quad (1.49)$$

Estas leyes son consecuencia inmediata de las leyes distributivas para producto exterior y producto escalar.

Para todo $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$ con $p \leq q$

$$X_p \lrcorner Y_q = (-1)^{p(q-p)} Y_q \lrcorner X_p. \quad (1.50)$$

Esta identidad se demuestra usando las ecs. (1.46), (1.12) y ec. (1.47) esto es, $(X_p \lrcorner Y_q) \cdot Z_{q-p} = Y_q \cdot (\widetilde{X}_p \wedge Z_{q-p}) = (-1)^{p(q-p)} Y_q \cdot (Z_{q-p} \wedge \widetilde{X}_p) = (-1)^{p(q-p)} (Y_q \lrcorner X_p) \cdot Z_{q-p}$, así, dado que el producto escalar es no degenerado, se sigue el resultado requerido.

1.3.1. Producto contraído de Multivectores

Los productos contraídos a la derecha e izquierda de $X, Y \in \bigwedge V$, es decir $X \lrcorner Y \in \bigwedge V$ y $X \llcorner Y \in \bigwedge V$, son definidos por

$$X \lrcorner Y = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \tau_k (\pi_j (X) \lrcorner \pi_{k+j} (Y)). \quad (1.51)$$

$$X \llcorner Y = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} \tau_k (\pi_{k+j} (X) \llcorner \pi_j (Y)). \quad (1.52)$$

Note que en el lado derecho de la ec. (1.51) aparece el producto contraído a la izquierda de j -vectores con $(k+j)$ -vectores, como definido por las ecs. (1.42) y (1.43). En el lado derecho de la ec. (1.52) aparece el producto contraído a la derecha de $(k+j)$ -vectores con j -vectores, como definido por las ecs. (1.44) y (1.45). Esto significa que

$$\pi_k (X \lrcorner Y) = \sum_{j=0}^{n-k} \pi_j (X) \lrcorner \pi_{k+j} (Y) \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, n, \quad (1.53)$$

$$\pi_k (X \llcorner Y) = \sum_{j=0}^{n-k} \pi_{k+j} (X) \llcorner \pi_j (Y) \quad \text{para cada } k = 0, 1, \dots, n. \quad (1.54)$$

Y, si $X = (X_0, \dots, X_k, \dots, X_n)$ y $Y = (Y_0, \dots, Y_k, \dots, Y_n)$, entonces

$$X \lrcorner Y = \left(\sum_{j=0}^n X_j \lrcorner Y_j, \dots, \sum_{j=0}^{n-k} X_j \lrcorner Y_{k+j}, \dots, X_0 \lrcorner Y_n \right), \quad (1.55)$$

$$X \llcorner Y = \left(\sum_{j=0}^n X_j \llcorner Y_j, \dots, \sum_{j=0}^{n-k} X_{k+j} \llcorner Y_j, \dots, X_n \llcorner Y_0 \right). \quad (1.56)$$

Estos productos contraídos son leyes internas sobre $\bigwedge V$. Los productos \lrcorner y \llcorner satisfacen las leyes distributivas, como fácilmente se puede verificar recordando las ecs. (1.48) y (1.49), pero ambos productos no son asociativos. $\bigwedge V$ dotado con cada uno de estos productos contraídos es un álgebra no asociativa la cual será llamada *álgebra interior de multivectores*.

Sean $X_p \in \bigwedge^p V$ y $Y_q \in \bigwedge^q V$. Entonces usando las ecs. (1.53) y (1.33), tenemos que

$$\begin{aligned} \pi_k(\tau_p(X_p) \lrcorner \tau_q(Y_q)) &= \sum_{j=0}^{n-k} \pi_j \circ \tau_p(X_p) \lrcorner \pi_{k+j} \circ \tau_q(Y_q) \\ &= \sum_{j=0}^{n-k} \begin{cases} 0_j, & j \neq p \\ X_p, & j = p \end{cases} \lrcorner \begin{cases} 0_{k+j}, & k+j \neq q \\ Y_q, & k+j = q \end{cases}. \end{aligned}$$

La suma del lado derecho de la ecuación anterior es $0_k = \sum_{j=0}^{n-k} 0_j \lrcorner 0_{k+j}$, para cada $k = 0, 1, \dots, n$ a menos que exista algún k_0 con $0 \leq k_0 \leq n$ tal que $k_0 + p = q$. Así, vemos que para $p > q$ no existe tal k_0 el cual pueda satisfacer las condiciones requeridas. Pero, para $p \leq q$ tenemos que $k_0 = q - p$ es el único número que satisface lo requerido. Entonces, desde la ecuación anterior se sigue que

$$\pi_k(\tau_p(X_p) \lrcorner \tau_q(Y_q)) = 0_k, \quad \text{para } p > q$$

$$\pi_{q-p}(\tau_p(X_p) \lrcorner \tau_q(Y_q)) = X_p \lrcorner Y_q, \quad \text{para } p \leq q.$$

Así, considerando la ec. (1.26) finalmente obtenemos

$$\tau_p(X_p) \lrcorner \tau_q(Y_q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p > q \\ \tau_{q-p}(X_p \lrcorner Y_q), & \text{si } p \leq q \end{cases}. \quad (1.57)$$

Análogamente a la ec. (1.57), podemos también obtener

$$\tau_p(X_p) \lrcorner \tau_q(Y_q) = \begin{cases} 0, & \text{si } p < q \\ \tau_{p-q}(X_p \lrcorner Y_q), & \text{si } p \geq q \end{cases}. \quad (1.58)$$

Terminamos esta sección presentando dos fórmulas notables relacionando productos contraídos y escalares, además otras dos fórmulas relacionando productos contraídos con productos exteriores y escalares.

Lema 61 Para todo $X, Y, Z \in \bigwedge V$

$$(X \lrcorner Y) \cdot Z = Y \cdot (\tilde{X} \wedge Z), \quad (1.59)$$

$$(X \lrcorner Y) \cdot Z = X \cdot (Z \wedge \tilde{Y}). \quad (1.60)$$

Demostración. Daremos sólo la demostración de la primera declaración, la otra es análoga. Desde la identidad de sumas

$$\sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} A_{k+j} \cdot (B_j \wedge C_k) = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k A_k \cdot (B_j \wedge C_{k-j}),$$

y usando las ecs. (1.38), (1.52) y (1.14), un cálculo directo nos lleva a

$$\begin{aligned}
(X \lrcorner Y) \cdot Z &= \sum_{k=0}^n \pi_k (X \lrcorner Y) \cdot Z_k = \sum_{k=0}^n \left(\sum_{j=0}^{n-k} X_j \lrcorner Y_{k+j} \right) \cdot Z_k \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} (X_j \lrcorner Y_{k+j}) \cdot Z_k = \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{n-k} Y_{k+j} \cdot (\widetilde{X}_j \wedge Z_k) \\
&= \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^k Y_k \cdot (\widetilde{X}_j \wedge Z_{k-j}) = \sum_{k=0}^n Y_k \cdot \left(\sum_{j=0}^k \widetilde{X}_j \wedge Z_{k-j} \right) \\
&= \sum_{k=0}^n Y_k \cdot \pi_k (\widetilde{X} \wedge Z) = Y \cdot (\widetilde{X} \wedge Z).
\end{aligned}$$

■

Lema 62 Para todo $X, Y, Z \in \bigwedge V$

$$X \lrcorner (Y \lrcorner Z) = (X \wedge Y) \lrcorner Z, \quad (1.61)$$

$$(X \lrcorner Y) \lrcorner Z = X \lrcorner (Y \wedge Z). \quad (1.62)$$

Demostación. Probaremos sólo la ec.(1.61). La demostración de la ec. (1.62) es análoga.

Sea $W \in \bigwedge V$. Usando la ec. (1.59) y la ley asociativa del producto exterior de multivectores, obtenemos

$$\begin{aligned}
(X \lrcorner (Y \lrcorner Z)) \cdot W &= (Y \lrcorner Z) \cdot (\widetilde{X} \wedge W) = Z \cdot \left((\widetilde{Y} \wedge \widetilde{X}) \wedge W \right) \\
&= Z \cdot \left((\widetilde{X} \wedge \widetilde{Y}) \wedge W \right) = ((X \wedge Y) \lrcorner Z) \cdot W.
\end{aligned}$$

Así, dado que el producto escalar es no degenerado, se sigue el resultado deseado. ■

1.4. Producto de Clifford

Las dos álgebras interiores junto con el álgebra exterior nos permiten definir un *producto de Clifford* de multivectores el cual es también una ley interna sobre $\bigwedge V$. El producto de Clifford de $X, Y \in \bigwedge V$, denotado por $XY \in \bigwedge V$, es definido por los siguientes axiomas

Ax-ci Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X \in \bigwedge V$:

$$(\tau_0 \alpha) X = X (\tau_0 \alpha) = \alpha X \text{ (multiplicación escalar de } X \text{ por } \alpha).$$

Ax-cii Para todo $X, Y, Z \in \bigwedge V$:

$$(XY) \cdot Z = Y \cdot (\tilde{X}Z) = X \cdot (Z\tilde{Y})$$

Ax-ciii Para todo $v \in V$ y $X, Y \in \bigwedge V$:

$$[X \lrcorner (\tau_1 v) + X \wedge (\tau_1 v)] Y = X [(\tau_1 v) \lrcorner Y + (\tau_1 v) \wedge Y].$$

Nota 63 Observe que

$$\tau_0 \alpha = (\alpha, 0_1, 0_2, \dots, 0_n) \text{ y } \tau_1 v = (0_0, v, 0_3, \dots, 0_n)$$

El producto de Clifford es distributivo y asociativo. En lo que sigue probaremos la distributividad y daremos un bosquejo de la demostración para la asociatividad.

Lema 64 Sean $A, X, Y \in \bigwedge V$, entonces

$$A(X + Y) = AX + AY$$

Demostración. Sea $Z \in \bigwedge V$ y $A, X, Y \in \bigwedge V$, entonces usando el axioma-cii tenemos

$$\begin{aligned} A(X + Y) \cdot Z &= (X + Y) \cdot (\tilde{A}Z) &= X \cdot (\tilde{A}Z) + Y \cdot (\tilde{A}Z) \\ &= (AX) \cdot Z + (AY) \cdot Z &= (AX + AY) \cdot Z \end{aligned}$$

luego, dado que el producto escalar de multivectores es no degenerado, obtenemos el resultado. ■

Lema 65 Sean $B, X, Y \in \bigwedge V$, entonces

$$(X + Y)B = XB + YB$$

Demostración. Sea $Z \in \bigwedge V$ y $B, X, Y \in \bigwedge V$, entonces usando el axioma-cii tenemos

$$\begin{aligned} [(X + Y)B] \cdot Z &= (X + Y) \cdot Z\tilde{B} &= X \cdot Z\tilde{B} + Y \cdot Z\tilde{B} \\ &= (XB) \cdot Z + (YB) \cdot Z &= (XB + YB) \cdot Z \end{aligned}$$

luego, dado que el producto escalar de multivectores es no degenerado, obtenemos el resultado. ■

Así, por los dos lemas anteriores tenemos demostrada la ley distributiva del producto de Clifford de multivectores. Para probar la propiedad asociativa del producto de Clifford, es necesario probar algunas propiedades previamente.

Lema 66 (Una ley asociativa) Para todo $v \in V$ y $X, Y \in \bigwedge V$, entonces

$$[X (\tau_1 v)] Y = X [(\tau_1 v) Y]$$

Demostración. Primero, observe que si $1 \in \mathbb{R}$, entonces $\tau_0 1 \in \bigwedge V$,

$$(\tau_0 1) X = 1X = X = X1 = X (\tau_0 1)$$

luego $\tau_0 1$ es el elemento identidad de $\bigwedge V$ con respecto al producto de Clifford.

Ahora, si tomamos $Y = \tau_0 1$ en el axioma (iii), tenemos

$$[X_{\perp}(\tau_1 v) + X \wedge (\tau_1 v)] (\tau_0 1) = X [(\tau_1 v)_{\perp}(\tau_0 1) + (\tau_1 v) \wedge (\tau_0 1)]$$

y como $\tau_0 1$ es el elemento identidad

$$X_{\perp}(\tau_1 v) + X \wedge (\tau_1 v) = X [0 + \tau_1 (v \wedge 1)] = X (\tau_1 v)$$

es decir,

$$X (\tau_1 v) = X_{\perp}(\tau_1 v) + X \wedge (\tau_1 v). \quad (1.63)$$

Por otro lado, si tomamos $X = \tau_0 1$ en el axioma (iii), tenemos

$$[(\tau_0 1)_{\perp}(\tau_1 v) + (\tau_0 1) \wedge (\tau_1 v)] Y = (\tau_0 1) [(\tau_1 v)_{\perp} Y + (\tau_1 v) \wedge Y]$$

y como $\tau_0 1$ es el elemento identidad y $(\tau_0 1) \wedge (\tau_1 v) = \tau_{0+1} (1 \wedge v)$, tenemos

$$[0 + \tau_1 (1 \wedge v)] Y = (\tau_1 v)_{\perp} Y + (\tau_1 v) \wedge Y$$

es decir,

$$\tau_1 (v) Y = (\tau_1 v)_{\perp} Y + (\tau_1 v) \wedge Y, \quad (1.64)$$

ahora, colocando (1.63) y (1.64) en el axioma (iii), para todo $v \in V$, y $X, Y \in \bigwedge V$, tenemos

$$[X (\tau_1 v)] Y = X [(\tau_1 v) Y]. \quad (1.65)$$

■

Nota 67 Observe que (1.63), (1.64) y (1.65) se obtienen sólo del axioma (iii).

Lema 68 (asociatividad mixta) Si $\alpha \in \mathbb{R}$ y $X, Y \in \bigwedge V$, entonces

$$(\alpha X) Y = X (\alpha Y) = \alpha (XY)$$

Demostración. Sea $Z \in \bigwedge V$, entonces usando el axioma (ii) tenemos

$$\begin{aligned} [(\alpha X) Y] \cdot Z &= Y \cdot [(\widetilde{\alpha X}) Z] = Y \cdot [(\alpha \widetilde{X}) Z] \\ &= (Y \widetilde{Z}) \cdot (\alpha \widetilde{X}) = \alpha [(Y \widetilde{Z}) \cdot \widetilde{X}] \\ &= \alpha [Y \cdot \widetilde{X} Z] = (\alpha Y) \cdot (\widetilde{X} Z) = X (\alpha Y) \cdot Z \end{aligned}$$

Entonces, dado que el producto escalar es no degenerado

$$(\alpha X) Y = X (\alpha Y).$$

Por otro lado, usando la asociatividad mixta del producto escalar

$$\begin{aligned} [(\alpha X) Y] \cdot Z &= \alpha [Y \cdot \tilde{X} Z] = \alpha [(XY) \cdot Z] \\ &= [\alpha (XY) \cdot Z] \end{aligned}$$

Es decir, dado que el producto escalar es no degenerado, tenemos

$$(\alpha X) Y = \alpha (XY).$$

■

Lema 69 (Otra ley asociativa) Para todo $\alpha \in \mathbb{R}$, y $X, Y \in \bigwedge V$

$$[X (\tau_0 \alpha)] Y = X [(\tau_0 \alpha) Y]$$

Demostración. Usando el axioma (i) y el lema previo, tenemos

$$\begin{aligned} [X (\tau_0 \alpha)] Y &= (\alpha X) Y = X (\alpha Y) \\ &= X [(\tau_0 \alpha) Y] \end{aligned}$$

■

Lema 70 Para todo $X, Y \in \bigwedge V$, $v, w \in V$

$$[X (\tau_1 v) (\tau_1 w)] Y = X [(\tau_1 v) (\tau_1 w) Y]$$

Demostración. Usando el lema previo

$$\begin{aligned} [X (\tau_1 v) (\tau_1 w)] Y &= [(X (\tau_1 v)) (\tau_1 w)] Y \\ &= [X (\tau_1 v)] [(\tau_1 w) Y] \\ &= X [(\tau_1 v) (\tau_1 w) Y] \end{aligned}$$

■

Lema 71 Para todo $B \in \bigwedge^2 V$ y $X, Y \in \bigwedge V$

$$[X (\tau_2 B)] Y = X [(\tau_2 B) Y]$$

Demostración. Primero note que si $B = \frac{1}{2!} B^{jk} e_j \wedge e_k \in \bigwedge^2 V$, entonces

$$\begin{aligned} \tau_2 B &= \frac{1}{2!} B^{jk} \tau_2 (e_j \wedge e_k) = \frac{1}{2!} B^{jk} (\tau_1 e_j) \wedge (\tau_1 e_k) \\ &= \frac{1}{2!} B^{jk} [(\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k) - \tau_0 (e_j \cdot e_k)] \\ &= \frac{1}{2!} B^{jk} (\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k) - \frac{1}{2!} B^{jk} \tau_0 (e_j \cdot e_k) \\ &= \frac{1}{2!} B^{jk} (\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k) - \frac{1}{2!} \tau_0 (B^{jk} e_j \cdot e_k), \end{aligned}$$

así, como B^{jk} es un término anti-simétrico y $e_j \cdot e_k$ es un término simétrico, entonces $B^{jk}e_j \cdot e_k = 0$, luego

$$\tau_2 B = \frac{1}{2!} B^{jk} (\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k).$$

Ahora, estamos en condiciones de demostrar el lema, en efecto

$$\begin{aligned} [X (\tau_2 B)] Y &= [X (\frac{1}{2!} B^{jk} (\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k))] Y \\ &= \frac{1}{2!} B^{jk} [X (\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k)] Y \\ &= \frac{1}{2!} B^{jk} X [(\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k) Y] \\ &= X [\frac{1}{2!} B^{jk} (\tau_1 e_j) (\tau_1 e_k) Y] \\ &= X [(\tau_2 B) Y] \end{aligned}$$

■

En general, se demuestra la asociatividad para k -vectores análogo al lema anterior y luego se realiza la demostración para multivectores.

Capítulo 2

APLICACIONES DEL FORMALISMO DE CLIFFORD EN EDP

La estructura algebraica introducida en el capítulo anterior es una potente herramienta matemática que permite una gran capacidad de cálculo lo cual quedará evidenciado en las aplicaciones de este capítulo y el posterior. En el presente capítulo estudiaremos algunas aplicaciones en el campo de las ecuaciones en derivadas parciales (EDP), que involucran un importante operador, llamado operador de Dirac. Este operador y su cuadrado ha sido extensamente usado en aplicaciones de la Física teórica, geometría diferencial y en análisis matemático, por ejemplo ver [1, 2, 4, 9, 13, 32].

Una teoría del operador de Dirac y su cuadrado actuando en secciones del fibrado de Clifford y secciones del fibrado de Spin-Clifford sobre el espacio tiempo de Riemann- Cartan ha sido presentado en [41] y más desarrollada en [27, 36], donde se ha estudiado el operador de Dirac y el operador de spin-Dirac sobre los espacios tiempo de Riemann-Cartan-Weyl, Riemann-Cartan y Riemannian (o Lorentziano), además en dichos trabajos se presentaron algunas relaciones entre estos operadores asociados a distintas conexiones.

Por otro lado, en el contexto del llamado análisis de Clifford se ha desarrollado una teoría basada sobre la descomposición ortogonal de un determinado espacio funcional, esta teoría ha mostrado ser una excelente herramienta para el estudio de ecuaciones en derivadas parciales, en particular para el estudio de las ecuaciones de la mecánica de fluidos. Por ejemplo, en [6, 7, 15, 16, 38], se ha desarrollado un cálculo sobre dominios acotados y no acotados donde las ecuaciones se escriben sobre un álgebra de Clifford y usando esos resultados ellos investigan las ecuaciones de Navier-stokes por medio de un principio de contracción de Banach.

El capítulo es organizado como sigue, en la sección 2.1 nosotros introducimos el operador de Dirac canónico \not{D} (asociado a la conexión de Levi-Civita D de un campo métrico \mathbf{g}) actuado sobre secciones del fibrado de Clifford de formas diferenciales $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. En la sección 2.2 introducimos el operador de Dirac \not{D} (asociado con una conexión arbitraria ∇) y también actuado sobre secciones de $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ y presentamos una relación entre el operador de Dirac canónico y el operador de Dirac en términos de los tensores torsión y no metricidad. Posteriormente, en la sección 2.3 se considera una conexión métrico-compatible y calculamos en una forma simple y directa el cuadrado del operador de Dirac sobre el espacio de Riemann-Carta y presentamos una relación entre estos operadores en términos de los tensores torsión y tensión. En la sección 3, presentamos la ecuación de Maxwell sobre el fibrado de Clifford y en la sección 3.1

escribimos, desde la ecuación anterior, la ecuación de Maxwell en la forma vectorial canónica. Finalmente, en la sección 4, escribimos las ecuaciones de Navier-Stokes en el formalismo de Clifford y presentamos una representación integral en términos de operadores proporcionados por el análisis de Clifford.

2.1. Preliminares sobre el Algebra de Clifford

Para abordar las aplicaciones que tenemos en mente, es conveniente recordar otro enfoque que permite introducir de manera equivalente el álgebra de Clifford de multivectores y un teorema concerniente al álgebra de Clifford real. Sea V un espacio vectorial sobre el campo real \mathbb{R} de dimensión finita, es decir, $\dim V = n, n \in \mathbb{N}$. El espacio dual a V será denotado por V^* .

Recordemos que el espacio de los k tensores (denotado por $T_k(V^*)$), es el conjunto de todas las aplicaciones multilineales τ_k , tales que

$$\tau_k : V^* \times \cdots \times V^* \rightarrow \mathbb{R}$$

y un multitensores τ de orden $m \in \mathbb{N}$ es un elemento de $T(V)$ donde

$$T(V) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} \oplus T_k(V^*)$$

de la forma $\tau = \sum_{k=0}^m \oplus \tau_k$, con $\tau_k \in T_k(V^*)$, tal que todas las componentes $\tau_k \in T_k(V^*)$ de τ son nulas para $k > m$. $T(V)$ es llamado el espacio de multitensores.

El álgebra exterior de V es el álgebra cociente

$$\bigwedge V = \frac{T(V)}{J},$$

donde $J \subset T(V)$ es el ideal bilateral de $T(V)$ generado por los elementos de la forma $u \otimes v + v \otimes u$, con $u, v \in V \subset T(V)$. Los elementos de $\bigwedge V$ son llamados multivectores.

Sea $\rho : T(V) \rightarrow \bigwedge V$ la proyección canónica de $T(V)$ sobre $\bigwedge V$. La multiplicación en $\bigwedge V$ es usualmente denotada por $\wedge : \bigwedge V \rightarrow \bigwedge V$ y llamada producto exterior, entonces si $A, B \in \bigwedge V$, tenemos

$$A \wedge B = \rho(A \otimes B),$$

donde $\otimes : T(V) \rightarrow T(V)$ es el producto tensorial usual.

Ahora, si dotamos el espacio vectorial V con un tensor métrico, podemos definir el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$ de un espacio vectorial métrico (V, g) como el álgebra cociente

$$\mathcal{Cl}(V, g) = \frac{T(V)}{J_g},$$

donde $J_g \subset T(V)$ es el ideal bilateral de $T(V)$ generado por los elementos de la forma $u \otimes v + v \otimes u - 2g(u, v)$, con $u, v \in V \subset T(V)$. Los elementos de $\mathcal{Cl}(V, g)$ son llamados algunas veces números de Clifford.

Sea $\rho_g : T(V) \rightarrow \mathcal{Cl}(V, g)$ la proyección natural de $T(V)$ sobre el álgebra cociente $\mathcal{Cl}(V, g)$. La multiplicación en $\mathcal{Cl}(V, g)$ es llamada producto de Clifford y se define como

$$AB = \rho_g(A \otimes B),$$

para todo $A, B \in \mathcal{Cl}(V, g)$. En particular, para $u, v \in V \subset \mathcal{Cl}(V, g)$, tenemos

$$u \otimes v = \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u) + g(u, v) + \frac{1}{2}(u \otimes v + v \otimes u) - g(u, v)$$

luego,

$$\rho_g(u \otimes v) \equiv uv = \frac{1}{2}(u \otimes v - v \otimes u) + g(u, v) = u \wedge v + g(u, v). \quad (2.1)$$

Desde donde, obtenemos la relación canónica que caracteriza el álgebra de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$,

$$uv + vu = 2g(u, v). \quad (2.2)$$

Observe que como el ideal $J_g \subset T(V)$ es no homogéneo, de grado par, éste induce una graduación parcial en el álgebra $\wedge V$, es decir,

$$\mathcal{Cl}(V, g) = \mathcal{Cl}^0(V, g) \oplus \mathcal{Cl}^1(V, g)$$

con

$$\begin{aligned} \mathcal{Cl}^0(V, g) &= \rho_g \left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} T_{2r}(V^*) \right) \\ \mathcal{Cl}^1(V, g) &= \rho_g \left(\bigoplus_{r=0}^{\infty} T_{2r+1}(V^*) \right). \end{aligned}$$

Se dice que $\mathcal{Cl}(V, g)$ es un álgebra graduada \mathbb{Z}_2 . Los elementos de $\mathcal{Cl}^0(V, g)$ forman una subálgebra de $\mathcal{Cl}(V, g)$, llamada subálgebra par $\mathcal{Cl}(V, g)$, mientras que $\mathcal{Cl}^1(V, g)$ no es un álgebra de Clifford.

El siguiente teorema, ver [8], nos permite deducir la universalidad del álgebra de Clifford de multivectores.

Sí \mathcal{A} es un álgebra asociativa con unidad, entonces cada aplicación lineal $\phi : V \rightarrow \mathcal{A}$ tal que

$$(\phi(u))^2 = g(u, u), \quad (2.3)$$

para todo $u \in V$, puede ser extendida en una única forma a un homomorfismo $C_\phi : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \mathcal{A}$, satisfaciendo la relación:

$$\phi = C_\phi \circ \rho_g. \quad (2.4)$$

Sean (V, g) y (V', g') dos espacios vectoriales métricos y $\psi : V \rightarrow V'$ una aplicación lineal satisfaciendo

$$g'(\psi(u), \psi(v)) = g(u, v) \quad (2.5)$$

para todo $u, v \in V$. Ahora, denotemos por $\Lambda\psi$ la extensión natural de ψ , es decir, la aplicación lineal $\Lambda\psi : \wedge V \rightarrow \wedge V'$, llamada extensión potencia exterior, tal que:

- i) para $s \in \bigwedge^0 V \subset \bigwedge^0 V$, $\Lambda\psi(s) = s$,
- ii) para cualquier multivector homogéneo $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r \in \bigwedge^r V \subset \bigwedge V$, $\alpha_i \in \bigwedge^1 V \equiv V$ tenemos

$$\Lambda\psi(\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_r) = \psi(\alpha_1) \wedge \cdots \wedge \psi(\alpha_r) \in \bigwedge^r V' \subset \bigwedge V'$$

si $A = \bigoplus_{j=1}^n A_j \in \bigwedge V$, $A_j \in \bigwedge^j V$ entonces

$$\Lambda\psi(A) = \bigoplus_{j=1}^n \Lambda\psi(A_j) \in \bigwedge V', \quad \Lambda\psi(A_j) \in \bigwedge^j V'.$$

Luego, usando el teorema anterior podemos mostrar que existe un homomorfismo $C_\psi : \mathcal{Cl}(V, g) \rightarrow \mathcal{Cl}(V', g')$ entre sus álgebras de Clifford tal que:

$$C_\psi \circ \rho_g = \rho_{g'} \circ \Lambda\psi. \quad (2.6)$$

Más aún, si V y V' son espacios vectoriales métricamente isomorfos, es decir, satisfacen (2.5), entonces sus álgebras de Clifford son isomorfas. En particular, dos álgebras de Clifford $\mathcal{Cl}(V, g)$ y $\mathcal{Cl}(V', g')$ con el mismo espacio vectorial subyacente V son isomorfas sí y sólo sí, las métricas g y g' tienen la misma signatura. Esencialmente, existe sólo un álgebra de Clifford (como álgebra graduada) para cada signatura sobre un espacio vectorial dado V .

Otra importante consecuencia de la universalidad es que $\mathcal{Cl}(V, g)$ es isomorfa, como un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , al álgebra exterior $\bigwedge V$. Existe una inmersión natural $\bigwedge V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, g)$. Entonces $\mathcal{Cl}(V, g)$ es un espacio vectorial 2^n -dimensional y dado $A \in \mathcal{Cl}(V, g)$ podemos escribir

$$A = \sum_{r=0}^n \langle A \rangle_r,$$

donde $\langle A \rangle_r \in \bigwedge^r V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, g)$ es la proyección de A en el $\bigwedge^r V$ subespacio de $\bigwedge V$. Finalmente, los elementos de $\mathcal{Cl}(V, g)$ son también llamados multivectores y, si $A = \langle A \rangle_r$ para algún r fijo, se dice que A es homogéneo de grado r . En este caso, también se escribe $A = A_r \in \bigwedge^r V \hookrightarrow \mathcal{Cl}(V, g)$.

2.1.1. Fibrado de Clifford

Los fibrados de Clifford son una herramienta esencial para las aplicaciones que estudiaremos en este formalismo, a continuación pasaremos a describir el fibrado tangente y cotangente de formas diferenciales, en realidad por simplicidad, sólo nos centraremos en el espacio tiempo de Minkowski.

Sea $(M, \eta, D, \tau_\eta, \uparrow)$ el espacio tiempo de Minkowski. Aquí, (M, η) es un espacio cuatro dimensional orientado, espacialmente por la forma de volumen τ_η y temporalmente por la relación de equivalencia \uparrow (para detalles ver [36]) M es una variedad Lorentziana, con $M \simeq \mathbb{R}^4$ y $\eta \in \text{sec} T_2^0 M$ es una métrica Lorentziana de signatura $(1, 3)$, el fibrado cotangente es definido por $T^*M = \cup_{x \in M} T_x^*M$, de la misma forma el fibrado tangente se define por $TM = \cup_{x \in M} T_x M$, además los espacios cotangente

T_x^*M y tangente T_xM , son isomorfos a $\mathbb{R}^{1,3}$, esto se denota $T_xM \simeq T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$, donde $\mathbb{R}^{1,3}$ es el espacio tiempo de Minkowski, D es la conexión de Levi-Civita de η , es decir $D\eta = 0$, $\mathbf{R}(D) = 0$ y $\mathbf{T}(D) = 0$, donde \mathbf{R} y \mathbf{T} son respectivamente los tensores torsión y curvatura. Sea $\eta \in \text{sec } T_0^2M$ la métrica sobre el fibrado cotangente asociado a $\eta \in \text{sec } T_2^0M$. El fibrado de Clifford de formas diferenciales $\mathcal{C}\ell(M, \eta)$ es el fibrado de álgebras, es decir, $\mathcal{C}\ell(M, \eta) = \cup_{x \in M} \mathcal{C}\ell(T_x^*M)$, donde $\forall x \in M$, $\mathcal{C}\ell(T_x^*M) = \mathbb{R}_{1,3}$, es así llamado *álgebra de espacio tiempo*. También, debemos recordar que $\mathcal{C}\ell(M, \eta)$ es un fibrado vectorial asociado al *fibrado referencial ortogonal* $\mathbf{P}_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M)$, es decir, $\mathcal{C}\ell(M, \eta) = P_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$ (ver detalles, por ejemplo en, [26, 35, 36]). Para cualquier $x \in M$, $\mathcal{C}\ell(T_x^*M)$ es un espacio vectorial sobre el campo real \mathbb{R} . Más aún, $\mathcal{C}\ell(T_x^*M)$ es isomorfa al álgebra de Cartan $\wedge T_x^*M$ del espacio cotangente y $\wedge T_x^*M = \sum_{k=0}^4 \wedge^k T_x^*M$, donde $\wedge^k T_x^*M$ es el espacio $\binom{4}{k}$ -dimensional de las k -formas. Entonces, secciones de $\mathcal{C}\ell(M, \eta)$ pueden ser representadas como una suma de formas diferenciales no homogéneas. Sean $\{x^\mu\}$ las coordenadas en el "gauge" de Einstein-Lorentz-Poincaré para M y sea $\{e_\mu = \partial/\partial x^\mu\} \in \text{sec } FM$ (el fibrado referencial) una base ortonormal para TM , es decir, $\eta(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Sea $\gamma^\nu = dx^\nu \in \text{sec } \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) tal que el conjunto $\{\gamma^\nu\}$ es la base dual de $\{e_\mu\}$, y de hecho, $\eta(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Más aún, introducimos la notación $\theta^a = \delta_\mu^a dx^\mu$ y $\mathbf{e}_a = \delta_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Decimos que $\{\mathbf{e}_a\}$ es una sección del fibrado referencial ortogonal $\mathbf{P}_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M)$ y su base dual $\{\theta^a\}$ es una sección del fibrado coreferencial ortogonal denotado por $P_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M)$.

2.1.2. Producto de Clifford

El *Product de Clifford* fundamental, el cual es denotado por juxtaposición de símbolos, es generado por $\theta^a\theta^a + \theta^b\theta^a = 2\eta^{ab}$ y si $\mathcal{C} \in \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ tenemos

$$\mathcal{C} = s + v_a \theta^a + \frac{1}{2!} b_{ab} \theta^a \theta^b + \frac{1}{3!} a_{abc} \theta^a \theta^b \theta^c + p \theta^5, \quad (2.7)$$

donde $\tau_\eta := \theta^5 = \theta^0 \theta^1 \theta^2 \theta^3 = dx^0 dx^1 dx^2 dx^3$ es el elemento de volumen y $s, v_a, b_{ab}, a_{abc}, p \in \text{sec } \wedge^0 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \eta)$.

Sea $\mathcal{A}_r \in \text{sec } \wedge^r T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \eta), \mathcal{B}_s \in \text{sec } \wedge^s T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \eta)$. For $r = s = 1$, definimos el *producto escalar* como sigue:

Para $a, b \in \text{sec } \wedge^1 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}\ell(M, \eta)$,

$$a \cdot b = \frac{1}{2}(ab + ba) = \eta(a, b). \quad (2.8)$$

Definimos también el *producto exterior* ($\forall r, s = 0, 1, 2, 3$) por

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r \wedge \mathcal{B}_s &= \langle \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s \rangle_{r+s}, \\ \mathcal{A}_r \wedge \mathcal{B}_s &= (-1)^{rs} \mathcal{B}_s \wedge \mathcal{A}_r, \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $\langle \rangle_k$ es la componente en $\wedge^k T^*M$ (proyección) del campo de Clifford. El producto exterior es extendido por linealidad a todas las secciones de $\mathcal{C}\ell(M, \eta)$.

Para $\mathcal{A}_r = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$, $\mathcal{B}_r = b_1 \wedge \dots \wedge b_r$, el producto escalar es aquí definido como sigue,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_r \cdot \mathcal{B}_r &= (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot (b_1 \wedge \dots \wedge b_r) \\ &= \begin{vmatrix} a_1 \cdot b_1 & \dots & a_1 \cdot b_r \\ \dots & \dots & \dots \\ a_r \cdot b_1 & \dots & a_r \cdot b_r \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Agregando, además, que si $r = s = 0$, el producto escalar es el producto ordinario en el campo real. Ahora, si $r \neq s$, entonces $\mathcal{A}_r \cdot \mathcal{B}_s = 0$. Finalmente, el producto escalar es extendido por linealidad para todas las secciones de $\mathcal{C}(M, \eta)$.

Para $r \leq s$, $\mathcal{A}_r = a_1 \wedge \dots \wedge a_r$, $\mathcal{B}_s = b_1 \wedge \dots \wedge b_s$ definimos la *contracción a la izquierda* por

$$\lrcorner : (\mathcal{A}_r, \mathcal{B}_s) \mapsto \mathcal{A}_r \lrcorner \mathcal{B}_s = \sum_{i_1 < \dots < i_r} \epsilon^{i_1 \dots i_r} (a_1 \wedge \dots \wedge a_r) \cdot (b_{i_1} \wedge \dots \wedge b_{i_r}) \sim b_{i_r+1} \wedge \dots \wedge b_{i_s} \quad (2.11)$$

donde \sim es la aplicación reversa (reversión) definida por

$$\sim : \sec \bigwedge^p T^*M \ni a_1 \wedge \dots \wedge a_p \mapsto a_p \wedge \dots \wedge a_1 \quad (2.12)$$

y extendida por linealidad a todas las secciones de $\mathcal{C}(M, \eta)$. Agregamos que para $\alpha, \beta \in \sec \bigwedge^0 T^*M$ la contracción es el producto ordinario en el campo real y que si $\alpha \in \sec \bigwedge^0 T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}(M, \eta)$, $\mathcal{A}_r \in \sec \bigwedge^r T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}(M, \eta)$, $\mathcal{B}_s \in \sec \bigwedge^s T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}(M, \eta)$ entonces $(\alpha \mathcal{A}_r) \lrcorner \mathcal{B}_s = \mathcal{A}_r \lrcorner (\alpha \mathcal{B}_s)$. La contracción a la izquierda es extendida por linealidad a todo par de elementos de secciones de $\mathcal{C}(M, \eta)$, es decir, para $\mathcal{A}, \mathcal{B} \in \sec \mathcal{C}(M, \eta)$

$$\mathcal{A} \lrcorner \mathcal{B} = \sum_{r,s} \langle \mathcal{A} \rangle_r \lrcorner \langle \mathcal{B} \rangle_s, \quad r \leq s. \quad (2.13)$$

Es también necesario introducir el operador de *contracción a la derecha* denotado por \lrcorner . La definición es obtenida desde la contracción a la izquierda presentada anteriormente con la imposición que $r \geq s$ y tomando en cuenta que ahora si $\mathcal{A}_r \in \sec \bigwedge^r T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}(M, \eta)$, $\mathcal{B}_s \in \sec \bigwedge^s T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}(M, \eta)$ entonces $\mathcal{A}_r \lrcorner (\alpha \mathcal{B}_s) = (\alpha \mathcal{A}_r) \lrcorner \mathcal{B}_s$.

Alguna de las principales fórmulas usadas en este tópico pueden ser obtenidas

desde las igualdades a continuación, donde $a \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}(M, \eta)$:

$$\begin{aligned}
 a\mathcal{B}_s &= a \lrcorner \mathcal{B}_s + a \wedge \mathcal{B}_s, \mathcal{B}_s a = \mathcal{B}_s \lrcorner a + \mathcal{B}_s \wedge a, \\
 a \lrcorner \mathcal{B}_s &= \frac{1}{2}(a\mathcal{B}_s - (-1)^s \mathcal{B}_s a), \\
 \mathcal{A}_r \lrcorner \mathcal{B}_s &= (-1)^{r(s-r)} \mathcal{B}_s \lrcorner \mathcal{A}_r, \\
 a \wedge \mathcal{B}_s &= \frac{1}{2}(a\mathcal{B}_s + (-1)^s \mathcal{B}_s a), \\
 \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s &= \langle \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s \rangle_{|r-s|} + \langle \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s \rangle_{|r-s|+2} + \dots + \langle \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s \rangle_{|r+s|} \\
 &= \sum_{k=0}^m \langle \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s \rangle_{|r-s|+2k} \\
 \mathcal{A}_r \cdot \mathcal{B}_r &= \mathcal{B}_r \cdot \mathcal{A}_r = \tilde{\mathcal{A}}_r \lrcorner \mathcal{B}_r = \mathcal{A}_r \lrcorner \tilde{\mathcal{B}}_r = \langle \tilde{\mathcal{A}}_r \mathcal{B}_r \rangle_0 = \langle \mathcal{A}_r \tilde{\mathcal{B}}_r \rangle_0, \\
 \langle \mathcal{A} \mathcal{B} \rangle_r &= (-1)^{r(r-1)/2} \langle \tilde{\mathcal{B}} \tilde{\mathcal{A}} \rangle_r, \\
 \langle \mathcal{A}_r \mathcal{B}_s \rangle_r &= \langle \tilde{\mathcal{B}}_s \mathcal{A}_r \rangle_r = (-1)^{s(s-1)/2} \langle \mathcal{B}_s \mathcal{A}_r \rangle_r.
 \end{aligned} \tag{2.14}$$

2.1.3. El Operador Estrella de Hodge

Sea \star el operador estrella de Hodge, es decir, la aplicación

$$\star : \bigwedge^k T^*M \rightarrow \bigwedge^{4-k} T^*M, \mathcal{A}_k \mapsto \star \mathcal{A}_k$$

donde para $\mathcal{A}_k \in \sec \bigwedge^k T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}(M, \eta)$

$$[\mathcal{B}_k \cdot \mathcal{A}_k]_{\tau_\eta} = \mathcal{B}_k \wedge \star \mathcal{A}_k, \forall \mathcal{B}_k \in \sec \bigwedge^k T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}(M, \eta). \tag{2.15}$$

$\tau_\eta = \theta^5 \in \bigwedge^4 T^*M$ es el elemento de volumen *standard*. Entonces, podemos verificar que

$$\star \mathcal{A}_k = \tilde{\mathcal{A}}_k \tau_\eta = \tilde{\mathcal{A}}_k \theta^5. \tag{2.16}$$

Los detalles de las fórmulas (2.14), (2.15) y (2.16) pueden ser encontradas en [36].

2.2. El Operador de Dirac

2.2.1. El operador de Dirac estándar

Sea M una variedad suavemente diferenciable, $\mathbf{g} \in \sec T_2^0 M$ un campo métrico suave, ∇ una conexión y \mathbf{T} y \mathbf{R} , los tensores torsión y curvatura respectivamente asociados a la conexión ∇ .

Definición 72 Dada la terna $(M, \mathbf{g}, \nabla)^*$:

a) Ésta es llamada un espacio de Riemann-Cartan si y sólo si

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \quad y \quad \mathbf{T}[\nabla] \neq 0.$$

*Recuerde (ver, por ejemplo [36]) que el trio (M, \mathbf{g}, ∇) es un espacio tiempo si éste es orientable en el espacio y tiempo.

b) Ésta es llamada un espacio de Riemann si y sólo si

$$\nabla \mathbf{g} = 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{T}[\nabla] = 0.$$

Para cada tensor métrico definido sobre la variedad M existe una y sólo una conexión que satisface estas condiciones de Levi-Civita de la métrica considerada y es denotada por D . Cuando $\dim M = 4$ y la métrica \mathbf{g} tiene signatura $(1, 3)$ la terna (M, \mathbf{g}, ∇) es llamada espacio tiempo de Riemann-Cartan y la terna (M, \mathbf{g}, D) es llamada espacio tiempo de Lorenziano.

c) Ésta es llamada un espacio de Riemann-Cartan-Weyl, si y sólo si

$$\nabla \mathbf{g} \neq 0 \quad \text{and} \quad \mathbf{T}[\nabla] \neq 0.$$

Para el cálculo del cuadrado del operador de Dirac sobre un espacio de Riemann-Cartan, necesitamos primero introducir sobre el fibrado de Clifford de formas diferenciales $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ un operador diferencial $\not\partial$, llamado el operador de Dirac estándar, el cual es asociado con la conexión de Levi-Civita de la estructura Riemanniana (o Lorenziana) (M, \mathbf{g}, D) . Un espacio tiempo Lorenziano para el cual $\mathbf{R} = 0$, es llamado espacio tiempo de Minkowski. Note que denotamos por $\mathbf{g} \in \sec T_0^2 M$ el tensor métrico del fibrado cotangente.

Dado $\mathbf{u} \in \sec TM$ y $u \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ considere la aplicación tensorial $A \mapsto u D_{\mathbf{u}} A$, $A \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Como $D_{\mathbf{u}} J_{\mathbf{g}} \subseteq J_{\mathbf{g}}$, donde $J_{\mathbf{g}}$ es el ideal usado en la definición de $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$, la noción de derivada covariante (relativa a la conexión de Levi-Civita) para al fibrado cociente $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$.

Sea $U \subset M$ un conjunto abierto y $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ sobre $TU \subset TM$ un referencial móvil con referencial móvil dual $\{\theta^\alpha\}$, donde $\theta^\alpha \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$.

Definición 73 El operador de Dirac estándar es el operador diferencial de primer orden

$$\not\partial = \theta^\alpha D_{\mathbf{e}_\alpha}. \quad (2.17)$$

Para $A \in \sec \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$,

$$\not\partial A = \theta^\alpha (D_{\mathbf{e}_\alpha} A) = \theta^\alpha \lrcorner (D_{\mathbf{e}_\alpha} A) + \theta^\alpha \wedge (D_{\mathbf{e}_\alpha} A),$$

luego definiendo

$$\begin{aligned} \not\partial \lrcorner A &= \theta^\alpha \lrcorner (D_{\mathbf{e}_\alpha} A) \\ \not\partial \wedge A &= \theta^\alpha \wedge (D_{\mathbf{e}_\alpha} A) \end{aligned} \quad (2.18)$$

podemos escribir

$$\not\partial = \not\partial \lrcorner + \not\partial \wedge.$$

Proposición 74 El operador de Dirac estándar $\not\partial$ es relacionado a la derivada exterior d y a codiferencial de Hodge δ por

$$\not\partial = d - \delta,$$

esto es, tenemos $\not\partial \wedge = d$ y $\not\partial \lrcorner = -\delta$. La demostración se puede encontrar en [36].

2.2.2. El operador de Dirac en el espacio de Riemann-Cartan-Weyl

Ahora consideremos una estructura de Riemann-Cartan-Weyl (M, \mathbf{g}, ∇) , donde ∇ es una conexión lineal arbitraria, la cual en general, no es compatible con la métrica. En este caso general, la noción de derivada covariante no pasa al fibrado cociente $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ [8]. A pesar de este hecho, aún es una operación bien definida y, en analogía con la sección anterior, podemos asociar con ésta, actuando sobre secciones del fibrado de Clifford $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$, el operador

$$\boldsymbol{\partial} = \theta^\alpha \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}, \quad (2.19)$$

donde $\{\theta^\alpha\}$ es un referencial móvil sobre T^*U , dual al referencial móvil $\{\mathbf{e}_\alpha\}$ sobre $TU \subset TM$.

Definición 75 El operador $\boldsymbol{\partial}$ es llamado operador de Dirac (o derivada de Dirac o algunas veces el gradiente) actuado sobre secciones del fibrado de Clifford.

También definimos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\partial} \lrcorner A &= \theta^\alpha \lrcorner (\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} A), \\ \boldsymbol{\partial} \wedge A &= \theta^\alpha \wedge (\nabla_{\mathbf{e}_\alpha} A), \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\boldsymbol{\partial} = \boldsymbol{\partial} \lrcorner + \boldsymbol{\partial} \wedge. \quad (2.21)$$

Con el objetivo de mostrar la relación entre el operador de Dirac estándar y el operador de Dirac, recordaremos algunos resultados sobre los tensores torsión, curvatura y no metricidad.

Sea $D_{\mathbf{e}_\beta} \theta^\alpha = -\overset{\circ}{\Gamma}{}^\alpha_{\beta\rho} \theta^\rho$, $D_{\mathbf{e}_\beta} e_\alpha = \overset{\circ}{\Gamma}{}^\rho_{\beta\alpha} e_\rho$, $\nabla_{\mathbf{e}_\beta} \theta^\alpha = -\Gamma^\alpha_{\beta\rho} \theta^\rho$ y $\nabla_{\mathbf{e}_\beta} e_\alpha = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} e_\rho$. Entonces, las componentes del tensor torsión $\Theta = e_\rho \otimes \Theta^\rho$ y el tensor curvatura \mathbf{R} son dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned} T^\rho_{\alpha\beta} &= \Theta(\theta^\rho, e_\alpha, e_\beta) = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} - \Gamma^\rho_{\beta\alpha} - c^\rho_{\alpha\beta} \\ R^\rho_{\mu\alpha\beta} &= \mathbf{R}(e_\mu, \theta^\rho, e_\alpha, e_\beta) \\ &= e_\alpha \left(\Gamma^\rho_{\beta\mu} \right) - e_\beta \left(\Gamma^\rho_{\alpha\mu} \right) + \Gamma^\rho_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\mu} - \Gamma^\rho_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\mu} - c^\sigma_{\alpha\beta} \Gamma^\rho_{\sigma\mu} \end{aligned} \quad (2.22)$$

donde $[e_\alpha, e_\beta] = c^\rho_{\alpha\beta} e_\rho$. Ahora, sea $\omega^\rho_\beta \in \sec \bigwedge^1 T^*M$ las conexiones 1-formas, $\Theta^\rho \in \sec \bigwedge^2 T^*M$ las torsiones 2-formas y $\mathcal{R}^\rho_\beta \in \sec \bigwedge^2 T^*M$ las curvaturas 2-formas, dadas por

$$\omega^\rho_\beta = \Gamma^\rho_{\alpha\beta} \theta^\alpha, \quad \Theta^\rho = \frac{1}{2} T^\rho_{\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad \mathcal{R}^\rho_\mu = \frac{1}{2} R^\rho_{\mu\alpha\beta} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta. \quad (2.23)$$

Multiplicando la ecuación (2.22) por $\frac{1}{2} \theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ y usando la ecuación (2.23), obtenemos las ecuaciones de estructura de Cartan

$$\begin{aligned} d\theta^\rho + \omega^\rho_\beta \wedge \theta^\beta &= \Theta^\rho \\ d\omega^\rho_\mu + \omega^\rho_\beta \wedge \omega^\beta_\mu &= \mathcal{R}^\rho_\mu \end{aligned} \quad (2.24)$$

Definición 76 *El campo tensorial no metricidad de la estructura (M, \mathbf{g}, ∇) es el campo tensorial $\mathbf{Q} \in \text{sec } T_3^0 M$ con componentes en la bases $\{\theta^\alpha\}$ dada por*

$$Q_{\alpha\beta\mu} = -\nabla_\alpha g_{\beta\mu} = -e_\alpha(g_{\beta\mu}) + g_{\sigma\mu}\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma + g_{\beta\sigma}\Gamma_{\alpha\mu}^\sigma \quad (2.25)$$

Cuando $\mathbf{Q} = 0$, se dice que ∇ es compatible con la métrica. Consideremos las no metricidad 2-formas, dadas por

$$\mathbf{Q}^\rho = \frac{1}{2}Q_{[\alpha\beta]}^\rho \theta^\alpha \wedge \theta^\beta, \quad (2.26)$$

donde $Q_{[\alpha\beta]}^\rho = g^{\rho\mu}(Q_{\alpha\beta\mu} - Q_{\beta\alpha\mu})$. Entonces, multiplicando la ecuación (2.25) por $\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$ y usando la ecuación (2.24), obtenemos

$$d\theta_\mu - \omega_\mu^\beta \wedge \theta_\beta = \Theta_\mu - \mathbf{Q}_\mu \quad (2.27)$$

donde $\{\theta_\mu\}$ es la base reciproca de $\{\theta^\mu\}$, es decir, $\theta_\mu = g_{\mu\nu}\theta^\nu$. La ecuación anterior puede ser usada como el complemento de las ecuaciones de estructura de Cartan para el caso de una variedad métrica.

Ahora, podemos recordar, sin demostración (ver [36]), una proposición que declara la relación entre los operadores ∂ y $\not\partial$.

Proposición 77 *Sean Θ^ρ y \mathbf{Q}^ρ la torsión y no metricidad 2-formas respectivamente, asociadas a la conexión ∇ , en un referencial móvil arbitrario $\{\theta^\alpha\}$. Entonces,*

$$\begin{aligned} \partial \wedge &= \not\partial \wedge - \Theta^\rho \wedge (\theta_{\rho\lrcorner}) \\ \partial \lrcorner &= \not\partial \lrcorner - (\Theta^\rho - \mathbf{Q}^\rho) \lrcorner (\theta_\rho \wedge) \end{aligned} \quad (2.28)$$

Así, desde la ecuación (2.28) tenemos la relación

$$\partial = \not\partial - \Theta^\rho \wedge (\theta_{\rho\lrcorner}) - (\Theta^\rho - \mathbf{Q}^\rho) \lrcorner (\theta_\rho \wedge). \quad (2.29)$$

2.2.3. El operador de Dirac en el espacio de Riemann-Cartan

Desde ahora supondremos que ∇ es compatible con la métrica, es decir, (M, \mathbf{g}, ∇) es un espacio de Riemann-Cartan, y de hecho en este caso ∇ define una conexión en $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$.

Empecemos recordando la bien conocida relación entre los coeficientes de las conexiones (en una base arbitraria) ∇ y D , la cual es dada por (ver detalles, por ejemplo en [36])

$$\Gamma_{\alpha\beta}^\rho = \overset{\circ}{\Gamma}_{\alpha\beta}^\rho + \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}^\rho + \frac{1}{2}S_{\alpha\beta}^\rho, \quad (2.30)$$

donde $T_{\alpha\beta}^\rho$ son las componentes del tensor torsión y $S_{\alpha\beta}^\rho$ son las componentes del tensor tensión de la conexión y pueden ser descompuestos como

$$S_{\alpha\beta}^\rho = \check{S}_{\alpha\beta}^\rho + \frac{2}{n}s^\rho g_{\alpha\beta} \quad (2.31)$$

donde $\check{S}_{\alpha\beta}^\rho$ es su parte no traza, la cual es llamada el corte de la conexión, y

$$s^\rho = \frac{1}{2}g^{\mu\nu}S_{\mu\nu}^\rho \quad (2.32)$$

es su parte traza, la cual es llamada la dilatación de la conexión.

Desde la ecuación (2.30), tenemos inmediatamente que

$$\nabla_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{e}_\alpha = D_{\mathbf{e}_\alpha}\mathbf{e}_\beta + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta) + \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{e}_\alpha, \mathbf{e}_\beta). \quad (2.33)$$

Ahora, recordando que para cualquier $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \sec TM$, con $\mathbf{u} = u^\alpha\mathbf{e}_\alpha$ y $\mathbf{v} = v^\beta\mathbf{e}_\beta$, los operadores torsión y tensión son dados por

$$\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \tau(u^\alpha\mathbf{e}_\alpha, v^\beta\mathbf{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\rho - \Gamma_{\beta\alpha}^\rho - c_{\alpha\beta}^\rho \right] \mathbf{e}_\rho = u^\alpha v^\beta T_{\alpha\beta}^\rho \mathbf{e}_\rho, \quad (2.34)$$

$$\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma(u^\alpha\mathbf{e}_\alpha, v^\beta\mathbf{e}_\beta) = u^\alpha v^\beta \left[\Gamma_{\alpha\beta}^\rho + \Gamma_{\beta\alpha}^\rho - b_{\alpha\beta}^\rho \right] \mathbf{e}_\rho = u^\alpha v^\beta S_{\alpha\beta}^\rho \mathbf{e}_\rho,$$

con $b_{\alpha\beta}^\rho = -(\mathcal{L}_{\mathbf{e}_\rho}\mathbf{g})_{\alpha\beta}$ donde $\mathcal{L}_{\mathbf{e}_\rho}$ es la derivada de Lie en la dirección del campo vectorial \mathbf{e}_ρ . Usando la ecuación (2.34) podemos calcular $\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, en términos de $D_{\mathbf{u}}\mathbf{v}$, así tenemos:

$$\nabla_{\mathbf{u}}\mathbf{v} = D_{\mathbf{u}}\mathbf{v} + \frac{1}{2}\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \frac{1}{2}\sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \quad (2.35)$$

Por otro lado, recordando las ecuaciones (2.17) y (2.19),

$$\check{\mathcal{D}} = \theta^\alpha D_{\mathbf{e}_\alpha} \quad \text{and} \quad \mathcal{D} = \theta^\alpha \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}$$

tenemos que para $A \in \sec TM$

$$\mathcal{D}A = \check{\mathcal{D}}A + \frac{1}{2}\theta^\alpha\tau(\mathbf{e}_\alpha, A) + \frac{1}{2}\theta^\alpha\sigma(\mathbf{e}_\alpha, A). \quad (2.36)$$

Nota 78 *i) Compare la ecuación (2.36) con la ecuación (34) de [27].*

ii) Note que si $\tau(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sigma(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0$, entonces $\mathcal{D} = \check{\mathcal{D}}$.

Es también posible, obtener una relación entre estos operadores cuando ellos actúan sobre secciones de $\wedge T^*M$. En efecto, sea $\mathcal{Q} \in \wedge T^*M$, entonces como ya conocemos, desde la ecuación (2.29) con $\mathbf{Q}^\rho = 0$ podemos escribir

$$\mathcal{D}\mathcal{Q} = \check{\mathcal{D}}\mathcal{Q} - \Theta^\rho \wedge (\theta_\rho \lrcorner \mathcal{Q}) - \Theta^\rho \lrcorner (\theta_\rho \wedge \mathcal{Q}). \quad (2.37)$$

La fórmula anterior nos permite, por ejemplo, escribir la relación entre las ecuaciones de Maxwell sobre los espacios tiempos de Riemann y Riemann-Cartan cuando $\mathcal{Q} \in \wedge^2 T^*M$ es el campo electromagnético (para detalles ver [34]).

Ahora calcularemos el cuadrado del operador de Dirac sobre un espacio tiempo de Riemann-Cartan. Tenemos por definición que,

$$\begin{aligned}\partial^2 &= (\partial_{\lrcorner} + \partial \wedge) (\partial_{\lrcorner} + \partial \wedge) \\ &= \partial_{\lrcorner} \partial_{\lrcorner} + \partial_{\lrcorner} \partial \wedge + \partial \wedge \partial_{\lrcorner} + \partial \wedge \partial \wedge\end{aligned}$$

luego, escribiendo

$$\mathcal{L}_+ = \partial_{\lrcorner} \partial \wedge + \partial \wedge \partial_{\lrcorner},$$

obtenemos que

$$\partial^2 = \partial^2_{\lrcorner} + \mathcal{L}_+ + \partial^2 \wedge. \quad (2.38)$$

El operador \mathcal{L}_+ cuando aplicado a una función escalar corresponde, para el caso de un espacio de Riemann-Cartan, al operador de onda introducido por Rapoport [33] y para el caso del operador de Dirac estándar, \mathcal{L}_+ se reduce al usual Laplaciano de Hoge de la variedad [41, 36].

Por otra parte, podemos calcular el cuadrado del operador de Dirac, en términos de los referentes móviles, desde la definición. En realidad, podemos escribir (ver [27]).

$$\partial^2 = g^{\beta\rho} [\nabla_{\mathbf{e}_\beta} \nabla_{\mathbf{e}_\rho} - \Gamma_{\beta\rho}^\alpha \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}] + \theta^\beta \wedge \theta^\rho [\nabla_{\mathbf{e}_\beta} \nabla_{\mathbf{e}_\rho} - \Gamma_{\beta\rho}^\alpha \nabla_{\mathbf{e}_\alpha}]. \quad (2.39)$$

Ahora, desde la ecuación(2.35) podemos exhibir una relación entre ∂^2 y $\not\partial^2$, una tarea que se realiza fácilmente si usamos un par de bases (duales) ortogonales $\{\mathbf{e}_a\}$ y $\{\theta^b\}$ para TU y T^*U ($U \subset M$). En realidad, desde la ecuación (2.39) inmediatamente tenemos

$$\begin{aligned}\partial^2 &= \partial \cdot \not\partial + \not\partial \wedge \partial \\ &= \eta^{\mathbf{ab}} [\nabla_{\mathbf{e}_a} \nabla_{\mathbf{e}_b} - \Gamma_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \nabla_{\mathbf{e}_c}] + \theta^{\mathbf{a}} \wedge \theta^{\mathbf{b}} [\nabla_{\mathbf{e}_a} \nabla_{\mathbf{e}_b} - \Gamma_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \nabla_{\mathbf{e}_c}],\end{aligned} \quad (2.40)$$

donde $\eta^{\mathbf{ab}} = \eta_{\mathbf{ab}} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$.

Con el objetivo de escribir la ecuación (2.40) en términos de D , primero calculamos $\nabla_{\mathbf{e}_\beta} \nabla_{\mathbf{e}_\rho} A$ donde $A \in \text{sec } TM$, entonces desde la ecuación (2.35) tenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{e}_a} \nabla_{\mathbf{e}_b} A &= D_{\mathbf{e}_a} D_{\mathbf{e}_b} A + \frac{1}{2} \tau(\mathbf{e}_a, D_{\mathbf{e}_b} A) + \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{e}_a, D_{\mathbf{e}_b} A) \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{\mathbf{e}_a} \tau(\mathbf{e}_b, A) + \frac{1}{4} \tau(\mathbf{e}_a, \tau(\mathbf{e}_b, A)) + \frac{1}{4} \sigma(\mathbf{e}_a, \tau(\mathbf{e}_b, A)) \\ &\quad + \frac{1}{2} D_{\mathbf{e}_a} \sigma(\mathbf{e}_b, A) + \frac{1}{4} \tau(\mathbf{e}_a, \sigma(\mathbf{e}_b, A)) + \frac{1}{4} \sigma(\mathbf{e}_a, \sigma(\mathbf{e}_b, A)).\end{aligned} \quad (2.41)$$

Por otro lado

$$\Gamma_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \nabla_{\mathbf{e}_c} A = \left(\overset{\circ}{\Gamma}_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} + \frac{1}{2} T_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} + \frac{1}{2} S_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \right) \left(D_{\mathbf{e}_c} A + \frac{1}{2} \tau(\mathbf{e}_c, A) + \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{e}_c, A) \right), \quad (2.42)$$

y desde las ecuaciones(2.41) y(2.42) podemos escribir

$$\partial \cdot \not\partial A = \not\partial \cdot \not\partial A + \eta^{\mathbf{ab}} S_{1A} \quad (2.43)$$

donde

$$\begin{aligned}
 S_1 A &= \frac{1}{2} \tau(\mathbf{e}_a, D_{\mathbf{e}_b} A) + \frac{1}{2} \sigma(\mathbf{e}_a, D_{\mathbf{e}_b} A) + \frac{1}{2} D_{\mathbf{e}_a} \tau(\mathbf{e}_b, A) \\
 &+ \frac{1}{4} \tau(\mathbf{e}_a, \tau(\mathbf{e}_b, A)) + \frac{1}{4} \sigma(\mathbf{e}_a, \tau(\mathbf{e}_b, A)) - \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \tau(\mathbf{e}_c, A) \\
 &- \frac{1}{2} \overset{\circ}{\Gamma}_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \sigma(\mathbf{e}_c, A) - \frac{1}{2} T_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} D_{\mathbf{e}_c} A - \frac{1}{4} T_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \tau(\mathbf{e}_c, A) - \frac{1}{4} T_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \sigma(\mathbf{e}_c, A) \\
 &- \frac{1}{2} S_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} D_{\mathbf{e}_c} A - \frac{1}{4} S_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \tau(\mathbf{e}_c, A) - \frac{1}{4} S_{\mathbf{ab}}^{\mathbf{c}} \sigma(\mathbf{e}_c, A)
 \end{aligned} \tag{2.44}$$

Así, usando la ecuación(2.43) y recordando que $\partial^2 = \partial \cdot \partial + \partial \wedge \partial$, finalmente obtenemos

$$\partial^2 A = (\not\partial)^2 A + g^{\mathbf{ab}} S_1 A + \theta^{\mathbf{a}} \wedge \theta^{\mathbf{b}} S_1 A. \tag{2.45}$$

2.3. Ecuaciones de Maxwell en el Fibrado de Clifford

En el fibrado de Hodge, las ecuaciones de Maxwell sobre una variedad Lorenziana (M, \mathbf{g}, D) , es un sistema exterior de ecuaciones diferenciales dadas por una 2-forma cerrada $F \in \sec \wedge^2 T^* M$ y una 3-forma $\mathbf{J}_e \in \sec \wedge^3 T^* M$. Entonces existe $G \in \sec \wedge^2 T^* M$ tal que

$$dF = 0 \quad \text{y} \quad dG = -\mathbf{J}_e. \tag{2.46}$$

Se postula, que en el vacío, existe una relación entre G y F dada por

$$G = \star F.$$

En este caso, colocando $\mathbf{J}_e = \star J_e$, $J_e \in \sec \wedge^1 T^* M$ y tomando en cuenta el codiferencial de Hodge $\delta = (-1)^r \star^{-1} d\star$, podemos escribir el sistema (2.46) como

$$dF = 0 \quad \text{y} \quad \delta F = -J_e, \tag{2.47}$$

donde F es llamado el campo de Faraday y J_e es llamado la corriente eléctrica.

Ahora, para escribir en el fibrado de Clifford las ecuaciones de Maxwell, consideremos un espacio tiempo Lorenziano $(M, \mathbf{g}, D, \tau_g, \uparrow)$ y el fibrado de Clifford de formas diferenciales $\mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Como D es la conexión de Levi-Civita de g , tenemos $\not\partial = d - \delta$. Así, suponiendo que el campo de Faraday y la corriente eléctrica son secciones del fibrado de Clifford, es decir, $F \in \sec \wedge^2 T^* M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$ y $J_e \in \sec \wedge^1 T^* M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathbf{g})$. Desde la ecuación (2.47) tenemos

$$\not\partial F = J_e \tag{2.48}$$

la cual es llamada ecuación de Maxwell en el fibrado de Clifford.

2.3.1. La Ecuación de Maxwell en la Forma Vectorial Estándar

Cuando consideramos el espacio tiempo de Minkowski $(M, \eta, D, \tau_\eta, \uparrow)$, la ecuación de Maxwell (2.48) es equivalente a las ecuaciones de Maxwell en la forma estándar del electromagnetismo elemental. En efecto, si consideramos el conveniente isomorfismo $\mathbb{R}_{1,3}^0 \simeq \mathbb{R}_{3,0}$ (ver [36]), eligiendo una cobase ortonormal global

$\{\gamma^\mu\}$, $\gamma^\mu = dx^\mu$, $\mu = 0, 1, 2, 3$, y denotando $\{\gamma_\mu\}$ la base recíproca de $\{\gamma^\mu\}$, es decir, $\gamma_\nu \cdot \gamma^\mu = \delta_\nu^\mu$, podemos escribir

$$\sigma_i = \gamma_i \gamma_0, \quad \mathbf{i} = -\gamma^0 \gamma^1 \gamma^2 \gamma^3 = -\gamma^5. \quad (2.49)$$

Observe que \mathbf{i} conmuta con los bivectores y así actúa como la unidad imaginaria $i = \sqrt{-1}$ en el subfibrado $\mathcal{C}\ell^0(M, \eta) = \bigcup_{x \in M} \mathcal{C}\ell^0(T_x^*M, \eta_x) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \eta)$, el cual es llamado fibrado de Pauli. Ahora, el campo electromagnético es representado en $\mathcal{C}\ell(M, \eta)$ por $F = \frac{1}{2} F^{\mu\nu} \gamma_\mu \wedge \gamma_\nu \in \sec \wedge^2 T^*M \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \mathfrak{g})$ con

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_1 & -E_2 & -E_3 \\ E_1 & 0 & -B_3 & B_2 \\ E_2 & B_3 & 0 & -B_1 \\ E_3 & -B_2 & B_1 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

donde (E_1, E_2, E_3) y (B_1, B_2, B_3) son las componentes Cartesianas usuales del campo eléctrico y magnético. Como es fácil de verificar, podemos escribir

$$F = \vec{E} + \mathbf{i} \vec{B}, \quad (2.51)$$

con, $\vec{E} = \sum_{i=1}^3 E_i \sigma_i$, $\vec{B} = \sum_{i=1}^3 B_i \sigma_i$.

Para la densidad de corriente eléctrica $J_e = \rho \gamma^0 + J^i \gamma_i$ podemos escribir

$$\gamma_0 J_e = \rho - \vec{j} = \rho - J^i \sigma_i. \quad (2.52)$$

Para el operador de Dirac tenemos

$$\gamma_0 \not{\partial} = \frac{\partial}{\partial x_0} + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \partial_i = \frac{\partial}{\partial t} + \nabla. \quad (2.53)$$

Por otro lado, multiplicando por la derecha ambos miembros de la ecuación (2.48) por γ_0 , obtenemos

$$\gamma_0 \not{\partial} F = \gamma_0 J_e,$$

de donde

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \nabla \right) (\vec{E} + \mathbf{i} \vec{B}) = \rho - \vec{j}, \quad (2.54)$$

así, podemos escribir

$$\partial_0 \vec{E} + \mathbf{i} \partial_0 \vec{B} + \nabla \cdot \vec{E} + \nabla \wedge \vec{E} + \mathbf{i} \nabla \cdot \vec{B} + \mathbf{i} \nabla \wedge \vec{B} = \rho - \vec{j}. \quad (2.55)$$

Para cualquier campo vectorial $\vec{A} \in \mathcal{C}\ell^0(M, \eta) \hookrightarrow \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ se define el operador rotación por

$$\nabla \times \vec{A} = -\mathbf{i} \nabla \wedge \vec{A}. \quad (2.56)$$

Esta, relación es posible una vez que el producto vectorial de los vectores $\vec{a} = \sum_{i=1}^3 a_i \sigma_i$ y $\vec{b} = \sum_{i=1}^3 b_i \sigma_i$ puede ser identificado con el dual del bivector $\vec{a} \wedge \vec{b}$ a

través de la fórmula $\vec{a} \times \vec{b} = -\mathbf{i} \vec{a} \wedge \vec{b}$. Finalmente, igualando términos del mismo grado en la ecuación (2.55) (en el subfibrado de Pauli), obtenemos

$$\begin{aligned}
 (a) \quad \nabla \cdot \vec{E} &= \rho & (b) \quad \nabla \times \vec{B} - \partial_0 \vec{E} &= \vec{j} \\
 (c) \quad \nabla \times \vec{E} + \partial_0 \vec{B} &= 0 & (d) \quad \nabla \cdot \vec{B} &= 0
 \end{aligned}
 \tag{2.57}$$

el cual reconocemos como el sistema de ecuaciones de Maxwell en la notación vectorial usual.

2.4. Ecuaciones de Fluidos en el Formalismo de Clifford

Ahora, consideremos un caso particular de nuestro formalismo para ser aplicado en la formulación de ecuaciones no relativísticas de la mecánica de fluidos. Esta incursión de la teoría de álgebra de Clifford se enmarca en el contexto del análisis de Clifford. En general, las ecuaciones en derivadas parciales no lineales han sido poco tratadas bajo la presente estructura, los trabajos pioneros de problemas con valor en la frontera, tal como las ecuaciones de Navier-Stokes en dominios acotados, fueron realizados por Gürlebeck y Sprössing [16], y fueron después extendidos a dominios no acotados en [15]. En particular Cerejeiras y Kähler [6], estudiaron el operador de Stokes usando el análisis de Clifford y luego aplicaron los resultados obtenidos para tratar las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes. Posteriormente, Kondrashuk, Notte-Cuello y Rojas-Medar [19, 20], usando similares ideas, estudiaron las ecuaciones estacionarias no lineales de los llamados fluidos asimétricos y las ecuaciones tipo magnetohidrodinámicas.

En lo que sigue consideraremos el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$, y denotemos por $\mathbb{R}^{p,q}$ ($n = p + q$) el espacio vectorial real \mathbb{R}^n dotado con una métrica no degenerada $g : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, de signatura $(0, q)$, es decir, si $\{e_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) es una base ortogonal de $\mathbb{R}^{0,q}$, entonces tenemos

$$g(e_i, e_j) = g_{ij} = g_{ji} = \begin{cases} -1, & i = j = 1, \dots, p + q = n \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

El álgebra de Clifford $Cl(\mathbb{R}^{p,q}, g) \equiv \mathbb{R}_{p,q} \equiv Cl_{p,q}$, es el álgebra de Clifford sobre \mathbb{R} , generada por 1 y la base $\{e_i\}$, ($i = 1, 2, \dots, n$) tal que $e_i^2 = g(e_i, e_i)$, $e_i e_j = -e_j e_i$ ($i \neq j$), y $e_A = e_1 e_2 \cdots e_n \neq \pm 1$.

Con esta base, cada elemento $A \in Cl_{p,q}$ será escrito en la forma

$$A = \sum_A a_A e_A$$

donde los coeficientes a_A son números reales.

En esta sección, primero discutiremos las ecuaciones de Navier-Stokes en un dominio no acotado (para dominios acotados el tratamiento es similar), y luego trataremos algunos sistemas acoplados con estas ecuaciones. Con el objetivo de lidiar con tales sistemas de ecuaciones en el formalismo de Clifford, recordaremos, sin

demostración, algunos teoremas y operadores desde el análisis de Clifford, introducidos por ejemplo en [6].

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ y $\Gamma = \partial\Omega$. Entonces, funciones u definidas en Ω con valores en $Cl_{0,n}$ ($p = 0$ y $q = n$) son consideradas. Estas funciones pueden ser escritas como

$$u(x) = \sum_A e_A u_A(x), \quad x \in \Omega,$$

donde $\{e_k\}$ es una base ortogonal para \mathbb{R}^n , $e_A = e_{\alpha_1} e_{\alpha_2} \cdots e_{\alpha_k}$, donde $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k \in \{1, \dots, n\}$, $1 \leq \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_k \leq n$ son las bases para $Cl_{0,n}$ y las componentes u_A son funciones $u_A : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Las propiedades tales como continuidad, diferenciabilidad, integrabilidad y otras atribuidas a u , son aquellas propiedades que poseen todas las componentes $u_A(x)$. En esta forma, los espacios de Banach usuales de estas funciones son denotados por $\mathcal{C}^\alpha(\Omega, Cl_{0,n})$, $\mathcal{L}_q(\Omega, Cl_{0,n})$ y $\mathcal{W}_q^k(\Omega, Cl_{0,n})$ o en forma abreviada $\mathcal{C}^\alpha(\Omega)$, $\mathcal{L}_q(\Omega)$ y $\mathcal{W}_q^k(\Omega)$.

Introduzcamos ahora, el operador de Dirac por

$$D = \sum_{K=1}^n e_k \frac{\partial}{\partial x_k}. \quad (2.58)$$

es fácil probar que $D^2 = -\Delta$, donde $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}$ es el operador Lapaciano en \mathbb{R}^n .

Sea un punto fijo z situado en el complemento de la clausura de Ω , el cual contiene un conjunto abierto no vacío. Entonces se puede considerar el operador

$$\tilde{T}f(y) = \int_{\Omega} K_z(x, y) f(x) d\Omega_x, \quad (2.59)$$

con $K_z(x, y) = G(x - y) - G(x - z)$, y donde $G(x)$ es el llamado núcleo de Cauchy generalizado, el cual es una función monogénica tanto a la izquierda como a la derecha, es decir, $(DG)(x) = (GD)(x) = 0$. Dado que $G(x)$ es una solución fundamental de D , se puede deducir que $K_z(x, y)$ es también una función monogénica para $x \in \Omega$, luego tenemos $D\tilde{T}f(y) = f(y)$ para $f \in \mathcal{L}_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. El operador (2.59) es una aplicación continua de $\mathcal{W}_q^k(\Omega)$ en $\mathcal{W}_q^{k+1}(\Omega)$, $1 < q < \infty$, $k = 0, 1, \dots$ y es un operador acotado de $\mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$ en $\mathcal{L}_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$. Para detalles ver [6].

Teorema 79 (Formula de Borel-Pompeiu) Si $f \in \mathcal{W}_q^1(\Omega)$, $1 < q < \infty$, entonces, se tiene

$$\tilde{F}_{\Gamma}f = f - \tilde{T}Df,$$

con

$$\tilde{F}_{\Gamma}f = \int_{\Gamma} K_z(x, y) \alpha(x) f(x) d\Gamma_x$$

donde $\alpha(x)$ es el vector normal unitario exterior a Γ en el punto x .

Proposición 80 Si $k \in \mathbb{N}$ entonces el operador

$$\tilde{F}_{\Gamma} : \mathcal{W}_q^{k-1/q}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{W}_q^k(\Omega) \cap \ker D$$

es continuo.

Teorema 81 (Formula de Plemelj-Sokhotzki) Si $f \in \mathcal{W}_q^1(\Gamma)$, $1 < q < \infty$, $l > 0$, entonces se tiene

$$\text{tr} \tilde{F}_\Gamma f = \frac{1}{2} f + \frac{1}{2} \tilde{S}_\Gamma f,$$

donde

$$\tilde{S}_\Gamma f = 2 \int_\Gamma K_z(x, y) \alpha(x) f(x) d\Gamma_x$$

es el operador integral de Cauchy sobre la frontera.

Teorema 82 El espacio $\mathcal{L}_q(\Omega)$, $1 < q < \infty$, permite la descomposición directa

$$\mathcal{L}_q(\Omega) = \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_q(\Omega) \oplus D \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{W}_q & (\Omega) \end{smallmatrix} \right).$$

El teorema anterior permite obtener las proyecciones

$$\mathbf{P} : \mathcal{L}_q(\Omega) \rightarrow \ker D(\Omega) \cap \mathcal{L}_q(\Omega)$$

y

$$\mathbf{Q} : \mathcal{L}_q(\Omega) \rightarrow D \left(\begin{smallmatrix} 0 & 1 \\ \mathcal{W}_q & (\Omega) \end{smallmatrix} \right),$$

para $q = 2$ estas proyecciones son ortoproyecciones. Más aún, en [6] se muestra que

$$\mathbf{Q}f = D\Delta_0^{-1}Df$$

donde Δ_0^{-1} , es el operador solución del problema de Dirichlet de la ecuación de Poisson con datos en la frontera homogéneos

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega, \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma \end{aligned}$$

para $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$, $1 < q < \infty$.

2.4.1. Ecuaciones de Navier-Stokes en el formalismo de Clifford

Las ecuaciones de Navier-Stokes pueden ser escritas en el formalismo de Clifford usando el operador de Dirac definido sobre \mathbb{R}^n , ver por ejemplo [6, 7]. Con el propósito de llevar a cabo esta tarea, recordemos que el subespacio $Cl_{0,n}$ generado por los elementos básicos e_A con largo igual a k es denotado por $Cl_{0,n}^k$ y sus elementos son llamados k -vectores. Se sigue que $Cl_{0,n}^1$ es isomorfo a \mathbb{R}^n ($Cl_{0,n}^1 \approx \mathbb{R}^n$). En este sentido, podemos ver un vector $u(x)$ como un multivector de grado 1, es decir, podemos identificar cada vector $u(x) \in \mathbb{R}^n$ con

$$u(x) = u_1(x)e_1 + \cdots + u_n(x)e_n \in Cl_{0,n}^1 \hookrightarrow Cl_{0,n}.$$

Entonces, podemos calcular $Du(x)$ cuando $u(x) \in Cl_{0,3}^1 \hookrightarrow Cl_{0,3}$, como sigue

$$Du(x) = Sc(Du) + \text{biv}(Du),$$

donde $Sc(Du)$ y $biv(Du)$ son la parte escalar y bivectorial de Du respectivamente **.

Las ecuaciones estacionarias de Navier-Stokes en la formulación clásica son escritas como

$$\begin{aligned} -\Delta \hat{u} + \frac{\rho}{\eta} (\hat{u} \cdot \text{grad}) \hat{u} + \frac{1}{\eta} \text{grad } p &= \frac{\rho}{\eta} \tilde{f} & \text{in } \Omega, \\ \text{div } \hat{u} &= 0 & \text{in } \Omega, \\ \hat{u} &= 0 & \text{on } \Gamma, \end{aligned} \quad (2.60)$$

donde, \hat{u} denota la velocidad del fluido y p la presión hidrostática, ambas son funciones no conocidas, ρ denota la densidad, η la viscosidad y \tilde{f} el vector fuerza externa.

Ahora, consideremos $u(x) \in Cl_{0,3}^1 \hookrightarrow Cl_{0,3}$ y tomando en cuenta que $D^2 = -\Delta$, $Sc(uD) = -\text{div } u$ y $Dp = \text{grad } p$, podemos escribir el sistema (2.60) como

$$\begin{aligned} DDu + \frac{\rho}{\eta} M(u) + \frac{1}{\eta} Dp &= 0 & \text{en } \Omega, \\ ScDu &= 0 & \text{en } \Omega, \\ u &= 0 & \text{sobre } \Gamma. \end{aligned} \quad (2.61)$$

donde $M(u) = [Sc(uD)u] - f$.

Teorema 83 *Suponga que $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$, $p \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathbb{R})$, $1 < q < \infty$; entonces, cualquier solución del sistema (2.61) tiene una presentación en el formalismo de Clifford de la siguiente forma*

$$\begin{aligned} u &= -\frac{\rho}{\eta} \tilde{T} Q \tilde{T} M \mathbf{u} - \frac{1}{\eta} \tilde{T} Q p \\ Sc \frac{\rho}{\eta} \tilde{T} Q \tilde{T} M \mathbf{u} + \frac{1}{\eta} Sc \tilde{T} Q p &= 0 \end{aligned} \quad (2.62)$$

Demostración. Recuerde que $Qf = D\Delta_0^{-1}Df$ y $D\tilde{T}f(y) = f(y)$, y tomando en cuenta la fórmula de Borel-Pompeiu

$$\tilde{T}D\mathbf{u} = \mathbf{u} - \tilde{F}_\Gamma \mathbf{u} = \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \in \mathcal{W}_q^1(\Omega)$$

podemos deducir que

$$\tilde{T}Q\tilde{T}DD\mathbf{u} = \tilde{T}(D\Delta_0^{-1}D)\tilde{T}DD\mathbf{u} = \tilde{T}D\Delta_0^{-1}DD\mathbf{u} = \tilde{T}D\mathbf{u} = \mathbf{u}. \quad (2.63)$$

** $Sc(Du) = -\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} - \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_2} - \frac{\partial u_3(x)}{\partial x_3}$.

$biv(Du) = e_1 \wedge e_2 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) + e_1 \wedge e_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) + e_2 \wedge e_3 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right)$.

Entonces, aplicando el operador $\tilde{T}Q\tilde{T}$ al sistema (2.61) y usando la fórmula (2.63) obtenemos el resultado esperado. ■

Para lectores interesados en resultados de existencia y unicidad de estas ecuaciones y en este contexto, pueden ver, por ejemplo [6].

2.4.2. Ecuaciones de la Magnetohidrodinámica en el formalismo de Clifford

Ecuaciones más complejas también pueden ser tratadas en el formalismo de Clifford, para ilustrar esta afirmación escribiremos en este formalismo las llamadas ecuaciones de la magnetohidrodinámica. En varias situaciones el movimiento de fluidos incompresibles eléctricamente cargados pueden ser modelados por las llamadas ecuaciones de la magnetohidrodinámica, las cuales corresponden a las ecuaciones de Navier-Stokes acopladas con las ecuaciones de Maxwell. En el caso cuando existen iones pesados con movimientos libres, no directamente debido al campo eléctrico (ver Schlüter [39], and Pikelner [31]), estas ecuaciones pueden ser reducidas a la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}^*}{\partial t} - \Delta \mathbf{u}^* + \frac{\rho}{\eta} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \frac{1}{\eta} (\mathbf{h}^* \cdot \nabla) \mathbf{h}^* + \frac{1}{\eta} \nabla p + \frac{\mu}{2\eta} \nabla (\mathbf{h}^*)^2 &= f^*, \\ \frac{\partial \mathbf{h}^*}{\partial t} - \Delta \mathbf{h}^* + \mu \sigma (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{h}^* - \mu \sigma (\mathbf{h}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* &= -\text{grad } w, \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{u}^* &= 0 & ; & & \text{div } \mathbf{h}^* &= 0, \\ \mathbf{u}^* |_{\partial\Omega} &= 0, & \mathbf{h}^* |_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

En este sistema, tenemos asumido condiciones de frontera homogéneas sólo por simplicidad. El caso no homogéneo es tratado en forma similar. Aquí, u^* y h^* son las incógnitas velocidad y campo magnético respectivamente; p^* es la presión (no conocida) hidrostática; w es una función (no conocida) relacionada al movimiento de iones pesados (de tal forma que la densidad de la corriente eléctrica, j_0 , generada por el movimiento satisface la relación $\text{rot } j_0 = -\sigma \nabla w$); ρ es la densidad de masa del fluido (asumida como una constante positiva); $\mu > 0$ es la constante de permeabilidad magnética del medio; $\sigma > 0$ es la constante de conductividad eléctrica; $\eta > 0$ es la constante de viscosidad del fluido y f^* es un campo de fuerza externa dado.

Para nuestro propósito, consideraremos el caso estacionario de las ecuaciones anteriores, entonces para $u^*, h^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $p^*, w^* : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, el sistema (2.64) se escriben como

$$\begin{aligned} -\Delta \mathbf{u}^* + \frac{\rho m}{\eta} (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* - \frac{1}{\eta} (\mathbf{h}^* \cdot \nabla) \mathbf{h}^* + \frac{1}{\eta} \nabla \pi^* &= \frac{\rho - \mu}{2\eta} f^* \\ -\Delta \mathbf{h}^* + \mu \sigma (\mathbf{u}^* \cdot \nabla) \mathbf{h}^* - \mu \sigma (\mathbf{h}^* \cdot \nabla) \mathbf{u}^* &= -\text{grad } w^* \\ \text{div } \mathbf{u}^* &= 0 & ; & & \text{div } \mathbf{h}^* &= 0, \end{aligned} \quad (2.65)$$

donde $\pi^* = p^* + \frac{\mu}{2} \mathbf{h}^{*2}$ y además hemos sustituido $\frac{\rho}{\eta} f^*$ por $\frac{\rho - \mu}{2\eta} f^*$. Para este sistema

consideremos las siguientes condiciones de frontera

$$\mathbf{u}^*(x) = 0, \quad \mathbf{h}^*(x) = 0 \quad \text{on } \partial\Omega = \Gamma. \quad (2.66)$$

Ahora, de la misma forma como en el caso de las ecuaciones de Navier-Stokes, podemos escribir el sistema (2.65) junto con (2.66), en el formalismo de Clifford con $\mathbf{u}(x), \mathbf{h}(x) \in Cl_{0,3}^1 \hookrightarrow Cl_{0,3}$, como

$$\begin{aligned} DD\mathbf{u} + \frac{\rho}{\eta}M(\mathbf{u}) - \frac{\mu}{\eta}M(\mathbf{h}) + \frac{1}{\eta}D\pi &= 0 \\ DD\mathbf{h} + \mu\sigma N(\mathbf{u}, \mathbf{h}) - \mu\sigma N(\mathbf{h}, \mathbf{u}) &= Dw \\ ScD\mathbf{u} = 0 \quad ; \quad ScD\mathbf{h} &= 0 \\ \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{h} = 0 \quad \text{on } \partial\Omega = \Gamma. \end{aligned} \quad (2.67)$$

donde $DD = -\Delta$ y $M(u), N(u, \mathbf{h})$ son operadores definidos por

$$M(\mathbf{u}) = [Sc(\mathbf{u}D)]\mathbf{u} - \overline{f^*}/2; \quad N(\mathbf{u}, \mathbf{h}) = [Sc(\mathbf{u}D)]\mathbf{h}.$$

Teorema 84 *Suponga que $f \in \mathcal{W}_q^{-1}(\Omega)$, $g \in \mathcal{L}_q(\Omega, \mathbb{R})$, $1 < q < \infty$; entonces, cualquier solución del sistema (2.67) tiene la representación*

$$\mathbf{u} + \frac{\rho}{\eta}\tilde{T}Q\tilde{T}M(\mathbf{u}) - \frac{\rho}{\eta}\tilde{T}Q\tilde{T}M(\mathbf{h}) + \frac{1}{\eta}\tilde{T}Qg = 0$$

$$\mathbf{h} + \mu\sigma\tilde{T}Q\tilde{T}N(\mathbf{u}, \mathbf{h}) - \mu\sigma\tilde{T}Q\tilde{T}N(\mathbf{h}, \mathbf{u}) - \tilde{T}Qw = 0$$

Teorema 85

$$\frac{\rho}{\eta}Sc(Q\tilde{T}M(\mathbf{u})) - \frac{\rho}{\eta}Sc(Q\tilde{T}M(\mathbf{h})) + \frac{1}{\eta}Sc(Qg) = 0$$

$$\mu\sigma Sc(Q\tilde{T}N(\mathbf{u}, \mathbf{h})) - \mu\sigma Sc(Q\tilde{T}N(\mathbf{h}, \mathbf{u})) - Sc(Qw) = 0$$

Demostración. La demostración es similar al caso de las ecuaciones de Navier-Stokes y puede ser encontrada en [20]. ■

Capítulo 3

APLICACIONES DEL FORMALISMO DE CLIFFORD EN RG

En Física teórica uno de los temas de investigación más importantes es la Teoría de la Relatividad General (RG), en este contexto muchos científicos ha investigado las más importantes ecuaciones de la física, a saber las ecuaciones de Maxwell, la ecuación Dirac y las ecuaciones de Einstein. En la actualidad las principales teorías direccionadas al estudio de la unificación de los campos físicos son la teoría de súper cuerdas y la teoría de las álgebras de Clifford, es sobre esta última teoría que estamos abocados en esta monografía.

Como hemos observados en el capítulo anterior, una presentación moderna de las ecuaciones de Maxwell hace uso de la teoría de formas diferenciales, la cual ha tenido éxito en reescribir el sistema original de ecuaciones de Maxwell como dos ecuaciones involucrando el operador derivada exterior y el llamado operador estrella de Hodge (ver la ecuación (2.47)).

Por otro lado, el campo espinorial de Dirac usado en electrodinámica cuántica es, a primera vista, un objeto de una naturaleza matemática muy diferente a la naturaleza del campo electromagnético, el cual es descrito por un campo 2-forma. En consecuencia, uno no puede ver ninguna relación entre estos campos o dicho de otra forma uno no puede ver relación alguna entre las ecuaciones de Maxwell y Dirac. Bueno, para nuestro asombro, en el formalismo de Clifford los campos de Maxwell pueden ser representados por una apropiada sección homogénea del fibrado de Clifford de formas diferenciales $\mathcal{C}\ell(M, g)$ y los campos de Dirac pueden ser representados por una suma de secciones homogéneas par de $\mathcal{C}\ell(M, g)$, así ambos campos pueden ser representados por objetos de una misma estructura matemática [36].

De manera similar como el formalismo de Clifford permite una unificación matemática de la teoría de Maxwell y Dirac, también existe en este mismo formalismo un enfoque a la geometría diferencial de un espacio tiempo de Riemann-Cartan-Weyl, con el objetivo de encontrar una descripción del campo gravitacional como un conjunto de secciones de un apropiado fibrado de Clifford sobre el espacio tiempo de Minkowski, que además satisfacen ecuaciones equivalentes a las ecuaciones de Einstein [36]. En este ámbito, el autor conjuntamente con W. Rodrigues Jr., han presentado una teoría Lagrangiana del campo gravitacional en un espacio tiempo de Minkowski, el cual es de tipo Yang-mills. En nuestra teoría cada campo gravitacional no trivial puede ser interpretado como generador de un efectivo espacio tiempo Lorentziano $(M \simeq \mathbb{R}^4, \mathbf{g}, \nabla, \tau_{\mathbf{g}}, \uparrow)$ donde \mathbf{g} satisface las ecuaciones de Einstein o generador de un efectivo espacio tiempo teleparalelo. Esta teoría es invariante bajo difeomorfismos

y bajo transformaciones locales de Lorentz y es basada en dos suposiciones, para detalles ver [28].

Con el objetivo de mostrar la potencia de cálculo que el formalismo de Clifford proporciona en este campo, en el presente capítulo mostraremos algunas aplicaciones, a saber, en lo que sigue se analizará la compatibilidad del principio de superposición para los campos de Maxwell y el principio de conservación de energía-momento, más exactamente, se prueba (ver [29]) usando el formalismo de fibrado de Clifford, que la energía y el momento de dos diferentes campos de Maxwell arbitrarios, de energía finita, son aditivos y también determinaremos (ver [30]) un efectivo espacio tiempo de Weitzenböck y un efectivo espacio tiempo Lorentziano determinados por una configuración del campo electromagnético libre, "viviendo" sobre un espacio tiempo Minkoskiano y satisfaciendo la ecuación de Maxwell $\partial F = 0$.

3.1. Principio de superposición de dos campos electromagnéticos

Sea $(M, \eta, D, \tau_\eta, \uparrow)$ el espacio tiempo de Minkowski. Aquí, (M, η) es un espacio cuatro dimensional orientado, espacialmente por la forma de volumen τ_η y temporalmente por la relación de equivalencia \uparrow (para detalles ver [36]) M es una variedad Lorentziana, con $M \simeq \mathbb{R}^4$ y $\eta \in \text{sec } T_2^0 M$ es una métrica Lorentziana de signatura $(1, 3)$, el fibrado cotangente es definido por $T^*M = \cup_{x \in M} T_x^*M$, de la misma forma el fibrado tangente se define por $TM = \cup_{x \in M} T_x M$, además los espacios cotangente T_x^*M y tangente $T_x M$, son isomorfos a $\mathbb{R}^{1,3}$, esto se denota $T_x M \simeq T_x^*M \simeq \mathbb{R}^{1,3}$, donde $\mathbb{R}^{1,3}$ es el espacio tiempo de Minkowski, D es la conexión de Levi-Civita de η , es decir $D\eta = 0$, $\mathbf{R}(D) = 0$ y $\mathbf{T}(D) = 0$, donde \mathbf{R} y \mathbf{T} son respectivamente los tensores torsión y curvatura. Sea $\eta \in \text{sec } T_0^2 M$ la métrica sobre el fibrado cotangente asociado a $\eta \in \text{sec } T_2^0 M$. El fibrado de Clifford de formas diferenciales $\mathcal{C}(M, \eta)$ es el fibrado de álgebras, es decir, $\mathcal{C}(M, \eta) = \cup_{x \in M} \mathcal{C}(T_x^*M)$, donde $\forall x \in M$, $\mathcal{C}(T_x^*M) = \mathbb{R}_{1,3}$, es así llamado *álgebra de espacio tiempo*. También, debemos recordar que $\mathcal{C}(M, \eta)$ es un fibrado vectorial asociado al *fibrado referencial ortogonal* $\mathbf{P}_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M)$, es decir, $\mathcal{C}(M, \eta) = P_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M) \times_{ad} \mathbb{R}_{1,3}$ (ver detalles, por ejemplo en, [26, 35, 36]). Para cualquier $x \in M$, $\mathcal{C}(T_x^*M)$ es un espacio vectorial sobre el campo real \mathbb{R} . Más aún, $\mathcal{C}(T_x^*M)$ es isomorfa al álgebra de Cartan $\bigwedge T_x^*M$ del espacio cotangente y $\bigwedge T_x^*M = \sum_{k=0}^4 \bigwedge^k T_x^*M$, donde $\bigwedge^k T_x^*M$ es el espacio $\binom{4}{k}$ -dimensional de las k -formas. Entonces, secciones de $\mathcal{C}(M, \eta)$ pueden ser representadas como una suma de formas diferenciales no homogéneas. Sean $\{x^\mu\}$ las coordenadas en el "gauge" de Einstein-Lorentz-Poincaré para M y sea $\{e_\mu = \partial/\partial x^\mu\} \in \text{sec } FM$ (el fibrado referencial) una base ortonormal para TM , es decir, $\eta(e_\mu, e_\nu) = \eta_{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Sea $\gamma^\nu = dx^\nu \in \text{sec } \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \text{sec } \mathcal{C}(M, \eta)$ ($\nu = 0, 1, 2, 3$) tal que el conjunto $\{\gamma^\nu\}$ es la base dual de $\{e_\mu\}$, y de hecho, $\eta(\gamma^\mu, \gamma^\nu) = \eta^{\mu\nu} = \text{diag}(1, -1, -1, -1)$. Más aún, introducimos la notación $\theta^a = \delta_\mu^a dx^\mu$ y $\mathbf{e}_a = \delta_a^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$. Decimos que $\{\mathbf{e}_a\}$ es una sección del fibrado referencial ortogonal $\mathbf{P}_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M)$ y su base dual $\{\theta^a\}$ es una sección del fibrado co-referencial ortogonal denotado por $P_{\text{SO}_{(1,3)}^e}(M)$.

3.1.1. Problema de superposición de Campos y Principio de Conservación de la Energía-Momento

A seguir pasaremos a describir el problema físico que abordaremos en esta sección.

Dado un referencial inercial $\mathbf{I} = \partial/\partial x^0 \in \text{sec}TM$ en el espacio tiempo de Minkowski, con coordenadas naturalmente adaptadas $\{x^\mu\}$ en el "gauge" de Einstein-Lorentz-Poincaré (aquí, las unidades usadas son tales que la velocidad de la luz c tiene valor 1 y así la coordenada tipo tiempo es $x^0 = t$). Entonces si tenemos dos antenas idénticas que son colocadas en el tiempo $t = -\tau$ y las cuales son capaces de producir dos campos electromagnéticos distintos, por simplicidad supondremos que los dos campos son producidos al mismo tiempo τ . Así, en el tiempo $t = 0$ tenemos dos configuraciones de campo electromagnéticos denotados por $F_1(0, \mathbf{x})$ y $F_2(0, \mathbf{x})$, los cuales tienen soporte compacto en una región $\mathfrak{R} \subset \mathbb{R}^3$ (esto físicamente significa que los campos tienen energía finita) y los cuales supondremos que se están moviendo en direcciones opuestas (para fijar idea en la dirección del eje z). Supongamos además, que las dos antenas están separadas por una distancia $D > \tau$, lo cual significa que una antena no es afectada por la otra cuando están generando las configuraciones de campos electromagnéticos arbitrarios $F_1(0, \mathbf{x})$ y $F_2(0, \mathbf{x})$. Estos campos entonces pueden ser tomados como datos de Cauchy para las ecuaciones de Maxwell y en cualquier tiempo t satisfaciendo la ecuación de Maxwell en espacio libre (sin fronteras)

$$\partial F_1 = 0, \quad \partial F_2 = 0. \quad (3.1)$$

Observe que al referirnos a la ecuación de Maxwell, en singular, no se está cometiendo un error, pues la ecuación de Maxwell en espacio libre $\partial F = 0$, es la ecuación de movimiento para una configuración de campo magnético $F \in \text{sec} \bigwedge^2 T^*M \hookrightarrow \text{sec} \mathcal{C}\ell(M, \eta)$, donde $\mathcal{C}\ell(M, \eta)$ es el fibrado de Clifford de formas diferenciales.

Sea d la distancia entre los frentes de ondas de los dos pulsos en $t = 0$ medidos a lo largo del eje z . Ahora, en el tiempo $t = (d + \tau)/2$ los pulsos $F_1(t, \mathbf{x})$ y $F_2(t, \mathbf{x})$ (los cuales serán siempre difractados, consecuencia del teorema de no focalización [44, 10], en relación a la configuración inicial $F_1(0, \mathbf{x})$ y $F_2(0, \mathbf{x})$) moviéndose a la velocidad de la luz $c = 1$, llenan la misma región del espacio y generan un campo electromagnético total

$$F(t, \mathbf{x}) = F_1(t, \mathbf{x}) + F_2(t, \mathbf{x}), \quad (3.2)$$

el cual satisface también la ecuación de Maxwell (con condiciones de borde apropiadas) debido al principio de superposición válido para ecuaciones en derivadas parciales lineales,

$$\partial F = 0. \quad (3.3)$$

En el formalismo de los fibrados de Clifford la densidad de energía-momento $\star \mathcal{T}^{\mathbf{a}} \in \text{sec} \bigwedge^3 T^*M \hookrightarrow \text{sec} \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ ($\mathbf{a} = 0, 1, 2, 3$) de la configuración del campo electromagnético F es dada por la fórmula

$$\star \mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \star (F \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}), \quad (3.4)$$

la cual es muy relevante, dado que sólo en este formalismo, hasta ahora, ha sido posible tal descripción para la densidad de energía-momento, más adelante en la sección 3.1.4, se realizará una detallada demostración. Entonces, la energía-momento $P_F^{\mathbf{a}}$ de la configuración del campo en el tiempo $t = \mathbf{t}$ es dada por

$$P_F^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star \mathcal{T}^{\mathbf{a}}, \quad (3.5)$$

donde B_2 esta contenido en la híper superficie de tiempo constante $t = \mathbf{t}$ en el espacio tiempo de Minkowski, ver la figura 1 para la definición de las regiones $B_1, B_2, B_3, B'_3, C_1, C_2, C'_1$ y C'_2 .

Ahora, debido a la ecuación (3.2) tenemos

$$\begin{aligned} \star \mathcal{T}^{\mathbf{a}} &= \frac{1}{2} \star (F \theta_{\mathbf{a}} \tilde{F}) = \frac{1}{2} \star ((F_1 + F_2) \theta^{\mathbf{a}} (\widetilde{F_1 + F_2})) \\ &= \frac{1}{2} \star (F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2 + F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1) \\ &= \star \mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} + \star \mathcal{T}_2^{\mathbf{a}} + \star \mathcal{K}^{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde

$$\begin{aligned} \star \mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} &= \frac{1}{2} \star (F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1), \quad \star \mathcal{T}_2^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \star (F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2), \\ \star \mathcal{K}^{\mathbf{a}} &= \frac{1}{2} \star (F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Entonces tenemos que

$$P_F^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star \mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star \mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} + \int_{B_2} \star \mathcal{T}_2^{\mathbf{a}} + \int_{B_2} \star \mathcal{K}^{\mathbf{a}}. \quad (3.8)$$

Deseamos probar que la energía-momento de las configuraciones F_1 y F_2 en el tiempo $t = \mathbf{t}$, en realidad en cualquier tiempo, son aditivas, es decir, deseamos mostrar que

$$P_F^{\mathbf{a}} = P_{F_1}^{\mathbf{a}} + P_{F_2}^{\mathbf{a}}, \quad \mathbf{a} = 0, 1, 2, 3, \quad (3.9)$$

con

$$P_{F_1}^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star \mathcal{T}_1^{\mathbf{a}}, \quad P_{F_2}^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star \mathcal{T}_2^{\mathbf{a}}. \quad (3.10)$$

Este problema es no trivial y desde nuestro punto de vista, no ha sido discutido de forma apropiada y satisfactoria en la literatura. Por ejemplo, en [25] (escrito en 1980) el autor dice que él ha encontrado este problema discutido sólo en dos textos ([17, 42]) de 50 libros que ha examinado. Más aún, desde algunos artículos publicados en la literatura hemos encontrado algunas buenas ideas, pero ninguna ofrece una solución rigurosa para el problema, para más detalles sobre estos comentarios ver nuestro artículo [29]. En [5] es propuesto que el tensor de energía-momento que difiere desde un diferencial exacto debe ser considerado equivalente. Esta es una buena idea,

si se pudiera demostrar (algo que no se ha hecho en [5]) que en la misma forma que hemos demostrado que $\star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = d\star\mathcal{W}^{\mathbf{a}}$, $\star\mathcal{W}^{\mathbf{a}} \in \sec \wedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ (ver más adelante en [29]) también,

$$\star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = d\star\mathcal{S}^{\mathbf{a}} \quad (3.11)$$

para algún $\star\mathcal{S}^{\mathbf{a}} \in \sec \wedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ el cual tiende a cero cuando las variables espaciales (x, y, z) tienden al infinito en el tiempo $t = \mathfrak{t}$, ya que en este caso, usando el teorema de Stokes, podemos escribir que

$$\int_{B_2} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star d\mathcal{S}^{\mathbf{a}} = \int_{\partial B_2} \star\mathcal{S}^{\mathbf{a}} = 0. \quad (3.12)$$

Ahora pasaremos a demostrar la fórmula (3.11) y luego determinaremos explícitamente $\star\mathcal{S}^{\mathbf{a}}$. Desde la teoría de Maxwell, se sigue que para cualquier configuración del campo electromagnético libre se tiene

$$\delta\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = -\partial_{\perp}\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = 0.$$

Bien, ya que obviamente tenemos $\partial_{\perp}\mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} = \partial_{\perp}\mathcal{T}_2^{\mathbf{a}} = 0$, necesariamente debemos tener que $\partial_{\perp}\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0$, es decir,

$$\partial_{\perp}\frac{1}{2}(F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1) = 0. \quad (3.13)$$

Para mostrar que en realidad este es el caso, primero observe que

$$\begin{aligned} F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 &= \langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 \rangle_1 + \langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 \rangle_3, \\ F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 &= \langle F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_1 + \langle F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_3. \end{aligned}$$

Luego, sumando las ecuaciones anteriores, los términos $\langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 \rangle_3$ y $\langle F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_3$ se cancelan y obtenemos

$$F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 = \langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_1.$$

Retornando a la ecuación (3.7) vemos que necesitamos solamente calcular $\partial_{\perp}\langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_1$. Así tenemos,

$$\begin{aligned} &\partial_{\perp}\langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_1 \\ &= \langle \partial(F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2) + \partial(F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1) \rangle_0 \\ &= \langle \theta^{\mathbf{b}}D_{e_{\mathbf{b}}}(F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2) + \theta^{\mathbf{b}}D_{e_{\mathbf{b}}}(F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1) \rangle_0 \end{aligned}$$

o bien

$$\begin{aligned} &\partial_{\perp}\langle F_1\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + F_2\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 \rangle_1 \\ &= \langle (\theta^{\mathbf{b}}D_{e_{\mathbf{b}}}F_1)\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_2 + \theta^{\mathbf{b}}F_1D_{e_{\mathbf{b}}}(\theta^{\mathbf{a}})\tilde{F}_2 + \theta^{\mathbf{b}}F_1\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{F}_2 \\ &\quad + (\theta^{\mathbf{b}}D_{e_{\mathbf{b}}}F_2)\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}_1 + \theta^{\mathbf{b}}F_2D_{e_{\mathbf{b}}}(\theta^{\mathbf{a}})\tilde{F}_1 + \theta^{\mathbf{b}}F_2\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{F}_1 \rangle_0. \end{aligned}$$

Por otro lado, desde la ecuación (3.1) tenemos

$$\theta^{\mathbf{b}} D_{e_{\mathbf{b}}} F_1 = \partial F_1 = 0 \quad \text{y} \quad \theta^{\mathbf{b}} D_{e_{\mathbf{b}}} F_2 = \partial F_2 = 0 \quad (3.14)$$

y recordando que $\theta^{\mathbf{a}} = \delta_{\mu}^{\mathbf{a}} dx^{\mu}$ y $e_{\mathbf{b}} = \delta_{\mathbf{b}}^{\mu} \partial / \partial x^{\mu}$, tenemos que $D_{e_{\mathbf{b}}} \theta^{\mathbf{a}} = 0$. Entonces, la ecuación (3.13) puede ser escrita como

$$\partial \lrcorner \frac{1}{2} \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1 \right\rangle_1 = \frac{1}{2} \left\langle \theta^{\mathbf{b}} F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 + \theta^{\mathbf{b}} F_2 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_1 \right\rangle_0 \quad (3.15)$$

Ahora examinemos el término $\left\langle \theta^{\mathbf{b}} F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 + \theta^{\mathbf{b}} F_2 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_1 \right\rangle_0$. Primero observe que

$$\begin{aligned} \theta^{\mathbf{b}} \left(F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right) &= \theta^{\mathbf{b}} \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_1 + \theta^{\mathbf{b}} \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_3 \\ &= \theta^{\mathbf{b}} \lrcorner \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_1 + \theta^{\mathbf{b}} \wedge \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_1 \\ &\quad + \theta^{\mathbf{b}} \lrcorner \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_3 + \theta^{\mathbf{b}} \wedge \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_3. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} \left\langle \theta^{\mathbf{b}} F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_0 &= \theta^{\mathbf{b}} \lrcorner \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_1 \\ &= \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_1 \lrcorner \theta^{\mathbf{b}} \\ &= \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \left(D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right) \theta^{\mathbf{b}} \right\rangle_0 \\ &= \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \left(\tilde{F}_2 \overleftarrow{\partial} \right) \right\rangle_0 \end{aligned}$$

donde hemos usado el símbolo $\left(D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right) \theta^{\mathbf{b}} := \tilde{F}_2 \overleftarrow{\partial}$. Ya que $\tilde{F}_2 \overleftarrow{\partial} = \widetilde{(\partial F_2)} = 0$, tenemos $\left\langle \theta^{\mathbf{b}} F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 \right\rangle_0 = 0$. Análogamente obtenemos que $\left\langle \theta^{\mathbf{b}} F_2 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_1 \right\rangle_0 = 0$, y así

$$\left\langle \theta^{\mathbf{b}} F_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_2 + \theta^{\mathbf{b}} F_2 \theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F}_1 \right\rangle_0 = 0. \quad (3.16)$$

Finalmente, sustituyendo la ecuación (3.16) en la ecuación (3.15) tenemos

$$\partial \lrcorner \frac{1}{2} \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1 \right\rangle_1 = 0. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, hemos probado que en realidad, $\delta \mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0$, o lo que es lo mismo, que

$$d \star \mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0,$$

y como estamos en el espacio tiempo de Minkowski, el lema de Poincaré implica que el campo 3-forma $\star \mathcal{K}^{\mathbf{a}} \in \sec \wedge^3 T^* M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ debe ser exacto, es decir

$$\star \mathcal{K}^{\mathbf{a}} = d \star \mathcal{S}^{\mathbf{a}}, \quad (3.18)$$

o

$$\delta \star \mathcal{S}^{\mathbf{a}} = -\mathcal{K}^{\mathbf{a}}. \quad (3.19)$$

Continuando con la demostración, debemos determinar explícitamente $\star \mathcal{S}^{\mathbf{a}}$. En realidad probaremos que $\mathcal{S}^{\mathbf{a}}$ difiere de

$$\mathcal{S}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{4} d \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 \right) \quad (3.20)$$

por no más que un término "gauge" $\delta \mathbf{L}^{\mathbf{a}}$ donde $\mathbf{L}^{\mathbf{a}} \in \sec \wedge^3 T^* M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ y donde $A_1, A_2 \in \sec \wedge^1 T^* M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ son los potenciales electromagnéticos correspondiente a los campos F_1 y F_2 , es decir, $dA_1 = F_1, dA_2 = F_2$.

Primero note que

$$\begin{aligned} A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta_1^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 &= \left(\theta^{\mathbf{a}} \cdot \tilde{A}_2 \right) A_1 + A_1 \lrcorner \left(\theta^{\mathbf{a}} \wedge \tilde{A}_2 \right) \\ &\quad + \left(\theta^{\mathbf{a}} \cdot \tilde{A}_1 \right) A_2 + A_2 \lrcorner \left(\theta^{\mathbf{a}} \wedge \tilde{A}_1 \right) \in \sec \wedge^1 T^* M. \end{aligned}$$

Entonces

$$\begin{aligned} d \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 \right) &= d \left\langle A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 \right\rangle_1 \\ &= \left\langle \partial \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 \right) \right\rangle_2. \end{aligned}$$

Ahora investigemos el término $\left\langle \partial \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right) \right\rangle_2$. Tenemos,

$$\begin{aligned} \partial \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right) &= \theta^{\mathbf{b}} D_{\mathbf{e}_b} \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right) \\ &= \theta^{\mathbf{b}} \left((D_{\mathbf{e}_b} A_1) \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_1 (D_{\mathbf{e}_b} \theta^{\mathbf{a}}) \tilde{A}_2 + A_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{\mathbf{e}_b} \tilde{A}_2 \right) \\ &= \theta^{\mathbf{b}} \left((D_{\mathbf{e}_b} A_1) \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{\mathbf{e}_b} \tilde{A}_2 \right), \end{aligned} \quad (3.21)$$

es decir,

$$\left\langle \partial \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right) \right\rangle_2 = \left\langle (\theta^{\mathbf{b}} D_{\mathbf{e}_b} A_1) \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right\rangle_2 + \left\langle \theta^{\mathbf{b}} A_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{\mathbf{e}_b} \tilde{A}_2 \right\rangle_2. \quad (3.22)$$

Pero,

$$\left\langle \theta^{\mathbf{b}} A_1 \theta^{\mathbf{a}} D_{\mathbf{e}_b} \tilde{A}_2 \right\rangle_2 = - \left\langle A_1 \theta^{\mathbf{a}} \widetilde{\partial A_2} \right\rangle_2,$$

y entonces la ecuación (3.22) puede ser escrita como

$$\begin{aligned} \left\langle \partial \left(A_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right) \right\rangle_2 &= \left\langle (\theta^{\mathbf{b}} D_{\mathbf{e}_b} A_1) \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 \right\rangle_2 - \left\langle A_1 \theta^{\mathbf{a}} \widetilde{\partial A_2} \right\rangle_2 \\ &= \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_1 \theta^{\mathbf{a}} F_2 \right\rangle_2. \end{aligned}$$

Podemos también verificar que

$$\left\langle \partial \left(A_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 \right) \right\rangle_2 = \left\langle F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} F_1 \right\rangle_2.$$

Así

$$\mathcal{S}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{4} \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_1 \theta^{\mathbf{a}} F_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} F_1 \right\rangle_2. \quad (3.23)$$

Por otro lado, tomando en cuenta que $\tilde{A}_2 = A_2$ tenemos

$$\begin{aligned} F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} F_1 &= 2 (F_1 \lrcorner \theta^{\mathbf{a}}) \wedge A_2 + 2 (F_1 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) \lrcorner A_2 \\ A_1 \theta^{\mathbf{a}} F_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 &= 2 (F_2 \lrcorner \theta^{\mathbf{a}}) \wedge A_1 + 2 (F_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) \lrcorner A_1 \end{aligned}$$

o

$$\begin{aligned} F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_2 + A_2 \theta^{\mathbf{a}} F_1 &= 2 \langle (A_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_1 \rangle_2 \\ A_1 \theta^{\mathbf{a}} F_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{A}_1 &= 2 \langle (A_1 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_2 \rangle_2. \end{aligned}$$

Entonces desde la ecuación (3.23) podemos escribir

$$\mathcal{S}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2} \langle (A_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_1 + (A_1 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_2 \rangle_2. \quad (3.24)$$

Ahora verifiquemos que $\delta \mathcal{S}^{\mathbf{a}} = -\mathcal{K}^{\mathbf{a}}$. En realidad,

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}^{\mathbf{a}} &= -\partial \lrcorner \mathcal{S}^{\mathbf{a}} = -\frac{1}{2} \partial \lrcorner \langle (A_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_1 + (A_1 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_2 \rangle_2 \\ &= -\frac{1}{2} \langle \partial \lrcorner ((A_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_1) + \partial \lrcorner ((A_1 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) F_2) \rangle_1 \end{aligned} \quad (3.25)$$

y tomando en cuenta que $D_{e_{\mathbf{b}}} (A_2 \lrcorner \theta^{\mathbf{a}}) = D_{e_{\mathbf{b}}} (A_2 \cdot \theta^{\mathbf{a}}) = 0$, podemos escribir

$$\partial \lrcorner (A_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}}) = \theta^{\mathbf{b}} D_{e_{\mathbf{b}}} (A_2 \wedge \theta^{\mathbf{a}} + A_2 \lrcorner \theta^{\mathbf{a}}) = \theta^{\mathbf{b}} D_{e_{\mathbf{b}}} (A_2 \theta^{\mathbf{a}}), \quad (3.26)$$

así la ecuación (3.25) puede ser escrita, una vez que $\mathcal{K}^{\mathbf{a}}$ (ecuación (3.7)), como

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{S}^{\mathbf{a}} &= -\frac{1}{2} \langle \partial \lrcorner (A_2 \theta^{\mathbf{a}} F_1) + \partial \lrcorner (A_1 \theta^{\mathbf{a}} F_2) \rangle_1 \\ &= -\frac{1}{2} \langle F_2 \theta^{\mathbf{a}} F_1 + F_1 \theta^{\mathbf{a}} F_2 \rangle_1 \\ &= -\frac{1}{2} \left\langle F_1 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_2 + F_2 \theta^{\mathbf{a}} \tilde{F}_1 \right\rangle_1 = -\mathcal{K}^{\mathbf{a}}, \end{aligned} \quad (3.27)$$

que es lo que deseábamos probar.

Es importante notar, que en vista de las ecuaciones (3.20) y (3.27) los $\mathcal{S}^{\mathbf{a}}$ satisfacen también un sistema de ecuaciones tipo Maxwell

$$\partial \mathcal{S}^{\mathbf{a}} = \mathcal{K}^{\mathbf{a}} \Leftrightarrow d\mathcal{S}^{\mathbf{a}} = 0, \quad \delta \mathcal{S}^{\mathbf{a}} = -\mathcal{K}^{\mathbf{a}}. \quad (3.28)$$

La importancia de este hallazgo es que ahora el teorema de Green generalizado para los campos de forma diferencial (véase la identidad de Green generalizada en 3.6.1) puede ser usado para determinar el comportamiento de $\mathcal{S}^{\mathbf{a}}$, una vez que conocemos las condiciones iniciales y de contorno.

3.1.2. Aditividad de la Energía y Momento de las Configuraciones de dos Campos Electromagnéticos

En esta sección, el cilindro canónico y sus subvariedades fronteras, descritos en 3.1.5, serán usados. Empezaremos recordando que desde las fórmulas $\star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \star\mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} + \star\mathcal{T}_2^{\mathbf{a}} + \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}}$, $d\star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = 0$, $d\star\mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} = 0$, $d\star\mathcal{T}_2^{\mathbf{a}} = 0$ y $d\star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0$ podemos usar el teorema de Stokes para escribir

$$\begin{aligned} 0 &= \int_N d\star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = -\int_{B'_1} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} + \int_{B'_2} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} + \int_{B'_3} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} \\ &= -\int_{B_1} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} + \int_{B_2} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} + \int_{B'_3} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}}, \end{aligned} \quad (3.29)$$

desde aquí se sigue que

$$\int_{B_1} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = \int_{B_2} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} + \int_{B'_3} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}}. \quad (3.30)$$

Ahora, si tomamos en cuenta la ecuación (3.7) la cual define $\star\mathcal{K}^{\mathbf{a}}$, vemos inmediatamente que $\int_{B'_3} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0$ ya que $F_1|_{B'_3} = 0$ y $F_1|_{B'_3} = 0$. También, del hecho que $\star\mathcal{K}^{\mathbf{a}}|_{B_1} = 0$ este sigue que $\int_{B_1} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0$ y obtenemos que

$$\int_{B_2} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} = 0, \quad (3.31)$$

aún si $\star\mathcal{K}^{\mathbf{a}}|_{B_2} \neq 0$.

Usando estos resultados, podemos calcular la energía total de $F = F_1 + F_2$ contenida en B_2 . Entonces, finalmente tenemos, tomando en cuenta la ecuación (3.6) y la ecuación (3.31), que

$$\begin{aligned} \int_{B_2} \star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} &= \int_{B_2} \star(\mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} + \mathcal{T}_2^{\mathbf{a}}) + \int_{B_2} \star\mathcal{K}^{\mathbf{a}} \\ &= \int_{B_2} \star(\mathcal{T}_1^{\mathbf{a}} + \mathcal{T}_2^{\mathbf{a}}), \end{aligned}$$

es decir,

$$P_F^{\mathbf{a}} = P_{F_1}^{\mathbf{a}} + P_{F_2}^{\mathbf{a}},$$

como deseábamos probar.

Resumiendo, hemos probado que la energía y momento de dos configuraciones de campos electromagnéticos libres, que satisfacen en cada instante de tiempo una ecuación libre de Maxwell con soporte compacto en \mathbb{R}^3 (es decir, con energía finita), son aditivos y así no existe incompatibilidad entre el principio de superposición de energía y el principio de conservación de energía-momento como sugerido por algunos autores. Es importante mencionar, que nuestra demostración es realizada en forma relativamente simple debido a la gran capacidad de cálculo que tiene

el formalismo de los fibrados de Clifford y en realidad nosotros (autores de [29]) no vemos como realizar esta demostración usando el cálculo vectorial usual de Heaviside-Gibbs o aún solamente usando el cálculo de Cartan de formas diferenciales, ya que nuestra demostración depende fundamentalmente de la notable fórmula para la densidad de energía-momento $\star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}$, la cual es válida para cualquier configuración del campo electromagnético F satisfaciendo la ecuación de Maxwell $\partial F = 0$, por la importancia de esta fórmula, realizaremos la demostración en 1.3.4. También es conveniente enfatizar que hemos encontrado la existencia de una 2-forma exacta $\mathcal{W}^{\mathbf{a}} \in \sec \bigwedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ satisfaciendo la ecuación de Maxwell $\partial \mathcal{W}^{\mathbf{a}} = \mathcal{T}^{\mathbf{a}}$. Este hecho, en realidad es un resultado no trivial que será abordado a continuación.

3.1.3. Nueva Ecuación Tipo Maxwell $\partial \mathcal{W}^{\mathbf{a}} = \mathcal{T}^{\mathbf{a}}$

Sea $\star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\star(F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}) \in \sec \bigwedge^3 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ la densidad de la energía-momento de una configuración del campo electromagnético $F \in \sec \bigwedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ ($\partial F = 0$). Como ya conocemos, tenemos

$$-\delta\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \partial_{\perp}\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = 0. \quad (3.32)$$

La ecuación(3.32) es equivalente a $d\star\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = 0$ y ya que estamos en el espacio tiempo de Minkowski debe existir $\mathcal{W}^{\mathbf{a}} \in \sec \bigwedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ tal que

$$-\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = \delta\mathcal{W}^{\mathbf{a}}$$

Entonces, nosotros declaramos que:

$$\begin{aligned} \mathcal{W}^{\mathbf{a}} &= dA^{\mathbf{a}}, \\ A^{\mathbf{a}} &= -\frac{1}{4}A\theta^{\mathbf{a}}A \end{aligned} \quad (3.33)$$

donde A es el potencial electromagnético, es decir $dA = F$.

Para probar nuestra declaración, en primer lugar note que

$$\begin{aligned} A\theta^{\mathbf{a}}A &= (\theta^{\mathbf{a}} \cdot A)A + A(\theta^{\mathbf{a}} \wedge A) \\ &= (\theta^{\mathbf{a}} \cdot A)A + A_{\perp}(\theta^{\mathbf{a}} \wedge A) + A \wedge (\theta^{\mathbf{a}} \wedge A), \end{aligned}$$

y como $A \wedge \theta^{\mathbf{a}} \wedge A = 0$, de la fórmula anterior tenemos

$$A\theta^{\mathbf{a}}A = A\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A} = \left\langle A\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A} \right\rangle_1. \quad (3.34)$$

Entonces

$$\begin{aligned} d\left(A\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A}\right) &= d\left\langle A\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A} \right\rangle_1 = \partial \wedge \left\langle A\theta^{\mathbf{a}}A \right\rangle_1 = \left\langle \partial(A\theta^{\mathbf{a}}A) \right\rangle_2 \\ &= \left\langle \left(\theta^{\mathbf{b}}D_{e_{\mathbf{b}}}A\right)\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A} + \theta^{\mathbf{b}}A\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{A} \right\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Pero,

$$\begin{aligned} \left\langle \theta^{\mathbf{b}}A\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{A} \right\rangle_2 &= \theta^{\mathbf{b}} \wedge \left\langle A\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{A} \right\rangle_1 = -\left\langle A\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{A} \right\rangle_1 \wedge \theta^{\mathbf{b}} \\ &= -\left\langle A\theta^{\mathbf{a}}\left(D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{A}\right)\theta^{\mathbf{b}} \right\rangle_2 = -\left\langle A\theta^{\mathbf{a}}\partial\tilde{A} \right\rangle_2 \\ &= -\left\langle A\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F} \right\rangle_2 = \left\langle A\theta^{\mathbf{a}}F \right\rangle_2. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Luego desde la ecuación (3.36) podemos escribir la ecuación (3.35) como

$$d(A\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A}) = \left\langle F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A} + \theta^{\mathbf{b}}A\theta^{\mathbf{a}}F \right\rangle_2, \quad (3.37)$$

y como $\tilde{A} = A$, tenemos

$$\begin{aligned} F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{A} + \theta^{\mathbf{b}}A\theta^{\mathbf{a}}F &= 2(F \lrcorner \theta^{\mathbf{a}}) \wedge A + 2(F \wedge \theta^{\mathbf{a}}) \lrcorner A \\ &= 2(A \wedge \theta^{\mathbf{a}})F = 2\langle (A \wedge \theta^{\mathbf{a}})F \rangle_2. \end{aligned}$$

Así, finalmente

$$d(A\theta^{\mathbf{a}}A) = 2\langle (A \wedge \theta^{\mathbf{a}})F \rangle_2 \quad (3.38)$$

de donde

$$\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = -\frac{1}{2}\langle (A \wedge \theta^{\mathbf{a}})F \rangle_2. \quad (3.39)$$

Ahora, para verificar que $\delta\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = -\mathcal{T}^{\mathbf{a}}$ donde,

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{W}^{\mathbf{a}} &= -\partial \lrcorner \mathcal{W}^{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\partial \lrcorner \langle (A \wedge \theta^{\mathbf{a}})F \rangle_2 = \frac{1}{2}\langle \partial(A \wedge \theta^{\mathbf{a}})F \rangle_1 \\ &= \frac{1}{2}\langle \partial(A\theta^{\mathbf{a}}F) \rangle_1 = \frac{1}{2}\langle F\theta^{\mathbf{a}}F \rangle_1 = -\frac{1}{2}\langle F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F} \rangle_1 = -\frac{1}{2}F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}, \end{aligned} \quad (3.40)$$

note que desde las ecuaciones (3.33) y (3.40) podemos escribir ($\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = dA^{\mathbf{a}} = -\frac{1}{4}d(A\theta^{\mathbf{a}}A)$ y $F = dA$)

$$d\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = 0, \quad \delta\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = -\mathcal{T}^{\mathbf{a}},$$

o

$$\partial\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = \mathcal{T}^{\mathbf{a}}. \quad (3.41)$$

Así, obtuvimos el resultado no trivial que los campos 2-formas $\mathcal{W}^{\mathbf{a}}$ describiendo la propagación de la energía-momento satisfacen una ecuación tipo Maxwell $\partial\mathcal{W}^{\mathbf{a}} = \mathcal{T}^{\mathbf{a}}$ con fuente de energía-momento dados por los campos 1-formas $\mathcal{T}^{\mathbf{a}}$.

3.1.4. La Notable Fórmula $\mathcal{T}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}F\theta_{\mathbf{a}}\tilde{F}$

Ahora probaremos que la densidad de energía-momento $\star\mathcal{T}_{\mathbf{a}}$ del campo de Maxwell puede ser escrito in el formalismo de fibrado de Clifford como

$$\star\mathcal{T}_{\mathbf{a}} = \frac{1}{2}\star(F\theta_{\mathbf{a}}\tilde{F}) \in \sec \bigwedge^3 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta). \quad (3.42)$$

Para derivar la ecuación(3.42) empezamos desde el Lagrangiano de Maxwell

$$\mathcal{L}_m = \frac{1}{2}F \wedge \star F, \quad (3.43)$$

donde $F = \frac{1}{2}F_{\mathbf{ab}}\theta^{\mathbf{a}} \wedge \theta^{\mathbf{b}} := \frac{1}{2}F_{\mathbf{ab}}\theta^{\mathbf{ab}} \in \sec \bigwedge^2 TM \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ es el campo electro-magnético. Ahora, denotando por δ el símbolo variacional (no confundir el símbolo variacional δ con el símbolo δ de la coderivación de Hodge), podemos fácilmente verificar que

$$\delta \star \theta^{\mathbf{ab}} = \delta \theta^{\mathbf{c}} \wedge [\theta_{\mathbf{c}} \lrcorner \star \theta^{\mathbf{ab}}].$$

Más aún, en general δ y \star no conmutan. En realidad, para cualquier $\mathcal{A}_p \in \sec \bigwedge^p T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ tenemos

$$\begin{aligned} [\delta, \star] \mathcal{A}_p &= \delta \star \mathcal{A}_p - \star \delta \mathcal{A}_p \\ &= \delta \theta^{\mathbf{a}} \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \star \mathcal{A}_p) - \star [\delta \theta^{\mathbf{a}} \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \mathcal{A}_p)]. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Multiplicando ambos miembros de la ecuación (3.44) con $\mathcal{A}_p = F$ sobre la derecha por $F \wedge$ obtenemos

$$F \wedge \delta \star F = F \wedge \star \delta F + F \wedge \{ \delta \theta^{\mathbf{a}} \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \star F) - \star [\delta \theta^{\mathbf{a}} \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F)] \}.$$

Luego sumando $\delta F \wedge \star F$ a ambos miembros de la ecuación anterior, obtenemos

$$\delta (F \wedge \star F) = 2\delta F \wedge \star F + \delta \theta^{\mathbf{a}} \wedge [F \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \star F) - (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F].$$

Entonces, se sigue (ver, [36, 37] para mayores detalles) que si $\delta \theta^{\mathbf{a}} = -\mathcal{L}_\xi \theta^{\mathbf{a}}$, para algún difeomorfismo generado por el campo vectorial ξ , que

$$\star \mathcal{T}_{\mathbf{a}} = \frac{\partial \mathcal{L}_m}{\partial \theta^{\mathbf{a}}} = \frac{1}{2} [F \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \star F) - (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F],$$

donde, \mathcal{L}_ξ denota la derivada de Lie en la dirección del campo vectorial ξ .

Ahora,

$$(\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F = -\star [(\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \lrcorner F] = -[(\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \lrcorner F] \tau_\eta$$

y usando también la identidad [36],

$$(\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F = \theta_{\mathbf{a}}(F \cdot F) \tau_\eta - F \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \star F),$$

obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} [F \wedge (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} \star F) - (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F] &= \frac{1}{2} \{ \theta_{\mathbf{a}}(F \cdot F) \tau_\eta - (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F - (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \theta_{\mathbf{a}}(F \cdot F) \tau_\eta - 2(\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \wedge \star F \} \\ &= \frac{1}{2} \{ \theta_{\mathbf{a}}(F \cdot F) \tau_\eta + 2[(\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \lrcorner F] \tau_\eta \} \\ &= \star \left(\frac{1}{2} \theta_{\mathbf{a}}(F \cdot F) + (\theta_{\mathbf{a}\lrcorner} F) \lrcorner F \right) = \frac{1}{2} \star (F \theta_{\mathbf{a}} \tilde{F}), \end{aligned}$$

donde para escribir la última línea usamos la identidad

$$\frac{1}{2} F n \tilde{F} = (n \lrcorner F) \lrcorner F + \frac{1}{2} n(F \cdot F), \quad (3.45)$$

cuya demostración es como sigue

$$\begin{aligned}
(n \lrcorner F) \lrcorner F + \frac{1}{2}n(F \cdot F) &= \frac{1}{2}[(n \lrcorner F)F - F(n \lrcorner F)] + \frac{1}{2}n(F \cdot F) \\
&= \frac{1}{4}[nFF - FnF - FnF + FFn] + \frac{1}{2}n(F \cdot F) \\
&= -\frac{1}{2}FnF + \frac{1}{4}[-2n(F \cdot F) + n(F \wedge F) + (F \wedge F)n] + \frac{1}{2}n(F \cdot F) \\
&= -\frac{1}{2}FnF + -\frac{1}{2}n(F \cdot F) + \frac{1}{2}n \wedge (F \wedge F) + \frac{1}{2}n(F \cdot F) \\
&= -\frac{1}{2}FnF = \frac{1}{2}Fn\tilde{F}.
\end{aligned}$$

válida para cualquier $n \in \sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$ y $F \in \sec \bigwedge^2 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}\ell(M, \eta)$.

Para completar la demostración y con la finalidad de mostrar algunos trucos del cálculo en este formalismo, detallamos la demostración que $\mathcal{T}_{\mathbf{a}} \cdot \theta_{\mathbf{b}} = \mathcal{T}_{\mathbf{b}} \cdot \theta_{\mathbf{a}}$.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T}_{\mathbf{a}} \cdot \theta_{\mathbf{b}} &= -\frac{1}{2}\langle F\theta_{\mathbf{a}}F\theta_{\mathbf{b}} \rangle_0 = -\langle (F \lrcorner \theta_{\mathbf{a}})F\theta_{\mathbf{b}} \rangle_0 - \frac{1}{2}\langle (\theta_{\mathbf{a}} \lrcorner F + \theta_{\mathbf{a}} \wedge F) F\theta_{\mathbf{b}} \rangle_0 \\
&= -\langle (F \lrcorner \theta_{\mathbf{a}})F\theta_{\mathbf{b}} \rangle_0 - \frac{1}{2}\langle (\theta_{\mathbf{a}} F F\theta_{\mathbf{b}}) \rangle_0 \\
&= -\langle (F \lrcorner \theta_{\mathbf{a}})(F \lrcorner \theta_{\mathbf{b}}) + (F \lrcorner \theta_{\mathbf{a}})(F \wedge \theta_{\mathbf{b}}) \rangle_0 + \frac{1}{2}\langle \theta_{\mathbf{a}}(F \cdot F)\theta^{\mathbf{b}} \rangle_0 - \frac{1}{2}\langle \theta_{\mathbf{a}}(F \wedge F)\theta_{\mathbf{b}} \rangle_0 \\
&= -\langle (F \lrcorner \theta_{\mathbf{a}})(F \lrcorner \theta_{\mathbf{b}}) \rangle_0 + \frac{1}{2}\langle (F \cdot F)(\theta_{\mathbf{a}} \cdot \theta_{\mathbf{b}}) \rangle_0 \\
&= -(F \lrcorner \theta_{\mathbf{b}}) \cdot (F \lrcorner \theta_{\mathbf{a}}) + \frac{1}{2}(F \cdot F)(\theta_{\mathbf{b}} \cdot \theta_{\mathbf{a}}) = \mathcal{T}_{\mathbf{b}} \cdot \theta_{\mathbf{a}}.
\end{aligned}$$

Observe que

$$\mathcal{T}_{\mathbf{ab}} = \mathcal{T}_{\mathbf{a}} \cdot \theta_{\mathbf{b}} = -\eta^{\mathbf{cl}} F_{\mathbf{ac}} F_{\mathbf{bl}} + \frac{1}{4} F_{\mathbf{cd}} F^{\mathbf{cd}} \eta_{\mathbf{ab}}, \quad (3.46)$$

el cual es un resultado conocido.

De hecho, para el campo electromagnético libre tenemos que $d \star \mathcal{T}^{\mathbf{a}} = 0$, el cual es equivalente a $\mathcal{T}^{\mathbf{a}} = -\partial \lrcorner \mathcal{T}^{\mathbf{a}} = 0$. En realidad, observe que

$$\begin{aligned}
\partial \lrcorner \mathcal{T}^{\mathbf{a}} &= \partial \lrcorner \frac{1}{2}(F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}) \\
&= \frac{1}{2}\langle \partial(F\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F}) \rangle_0 \\
&= \frac{1}{2}\langle (\partial F)\theta^{\mathbf{a}}\tilde{F} + \theta^{\mathbf{b}}(F\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{F}) \rangle_0 \\
&= \frac{1}{2}\langle \theta^{\mathbf{b}}(F\theta^{\mathbf{a}}D_{e_{\mathbf{b}}}\tilde{F}) \rangle_0,
\end{aligned} \quad (3.47)$$

donde hemos usado que $\partial F = 0$. Ahora,

$$\begin{aligned}
\theta^{\mathbf{b}} \left(F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right) &= \theta^{\mathbf{b}} \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_1 + \theta^{\mathbf{b}} \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_3 \\
&= \theta^{\mathbf{b}} \lrcorner \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_1 + \theta^{\mathbf{b}} \wedge \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_1 \\
&\quad + \theta^{\mathbf{b}} \lrcorner \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_3 + \theta^{\mathbf{b}} \wedge \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_3.
\end{aligned} \tag{3.48}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
\langle \theta^{\mathbf{b}} \left(F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right) \rangle_0 &= \theta^{\mathbf{b}} \lrcorner \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_1 = \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \right\rangle_1 \lrcorner \theta^{\mathbf{b}} \\
&= \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \theta^{\mathbf{b}} \right\rangle_0 \\
&= \left\langle F\theta^{\mathbf{a}} (\widetilde{\partial F}) \right\rangle_0 = 0,
\end{aligned}$$

aquí hemos usado el símbolo $(\widetilde{\partial F}) := D_{e_{\mathbf{b}}} \tilde{F} \theta^{\mathbf{b}}$ y el hecho que $(\widetilde{\partial F}) = 0$.

3.1.5. Cilindro estándar en el Espacio Tiempo de Minkowski y sus fronteras

Sea N el cilindro estándar (ver figura al final de la sección) [40], el espacio tiempo de Minkowski el cual está descrito en las coordenadas de Einstein-Lorentz-Poincaré $\{x^\mu\}$ naturalmente adaptadas a un referencial inercial $\mathbf{I} = \partial/\partial x^0$ por

$$N = \left\{ (x^0, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i \leq r', 0 \leq x^0 \leq t \right\}$$

Las fronteras de N son las siguientes subvariedades de M ,

$$\begin{aligned}
B'_1 &= \left\{ (0, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i < r' \right\} \quad ; \quad B'_2 = \left\{ (t, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i < r' \right\} \\
C'_1 &= \left\{ (0, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i = r' \right\} \quad ; \quad C'_2 = \left\{ (t, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i = r' \right\} \\
B'_3 &= \left\{ (x^0, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i = r', 0 < x^0 < t \right\},
\end{aligned}$$

donde B'_3 es una híper superficie tipo tiempo y las otras cuatro son híper superficies tipo espacio. Definimos también las variedades $B_1 \subset B'_1$ y $B_2 \subset B'_2$

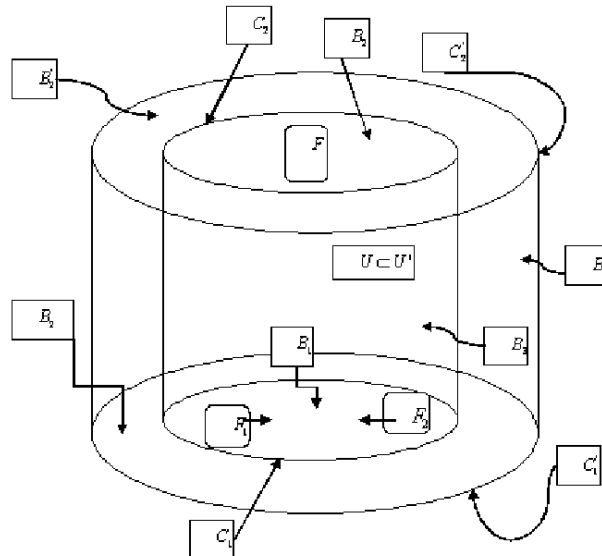
$$\begin{aligned}
B_1 &= \left\{ (0, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i < r_1, r_1 \ll r' \right\}, \\
B_2 &= \left\{ (0, x^1, x^2, x^3) \mid \sum_{i=1}^3 x^i x^i < r_2, r_2 \ll r' \right\},
\end{aligned}$$

Las cuales contienen respectivamente (ver la figura abajo) las configuraciones de los campos $F(0, \mathbf{x}) = F_1(0, \mathbf{x}) + F_2(0, \mathbf{x})$ y $F(t, \mathbf{x}) = F_1(t, \mathbf{x}) + F_2(t, \mathbf{x})$.

Denotando el interior de N por U' y también introduciendo la subvariedad $U \subset U'$ (ver Figura abajo). La tabla abajo [40], muestra los principales características de las subvariedades anteriores realizada en la sección principal.

Subvariedad	Topología	Orientación	Clausura	Causal Caracter
U	\mathbb{R}^4	desde M	$U^- = U \bigcup_{j=1}^3 B_j \bigcup_{i=1}^2 C_i$	tipo-tiempo
U'	\mathbb{R}^4	desde M	$U'^- = U' \bigcup_{j=1}^3 B'_j \bigcup_{i=1}^2 C'_i$	
$B_i (i = 1, 2)$	\mathbb{R}^3	desde U	$B_i^- = B_i \bigcup C_i$	tipo-espacio
$B'_i (i = 1, 2)$	\mathbb{R}^3	desde U'	$B'_i^- = B'_i \bigcup C'_i$	
B_3	$\mathbb{R} \times S^2$	desde U	$B_3^- = B_3 \bigcup C_1 \bigcup C_2$	tipo-tiempo
B'_3	$\mathbb{R} \times S^2$	desde U'	$B'_3^- = B'_3 \bigcup C'_1 \bigcup C'_2$	
$C_i (i = 1, 2)$	S^2	desde B_i , no B_3	$C_i^- = C_i$	tipo-espacio
$C'_i (i = 1, 2)$	S^2	desde B'_i , no B'_3	$C'_i^- = C'_i$	

Tabla 1. Características principales de las Subvariedades N, B'_i, B_i, C'_i y C_i



3.1.6. Identidad de Green Generalizada

En esta sección M es una variedad diferenciable n -dimensional y \mathbf{g} es una métrica sobre TM (con \mathbf{g} la correspondiente métrica sobre T^*M) de signatura arbitraria (p, q) , con $p + q = n$. Suponemos más aún que $\bigwedge T^*M$ es el fibrado exterior y $\mathcal{C}(M, \mathbf{g})$ es el fibrado de Clifford de M . Sea $\mathcal{P} \in \sec \bigwedge^p T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}(M, \mathbf{g})$, entonces derivemos una identidad integral involucrando \mathcal{P} , $d\mathcal{P}$ y $\delta\mathcal{P}$ y además una distribución de Green $\mathbf{G}_{\bar{x}} \in \sec \bigwedge^p T^*\bar{M} \otimes \sec \bigwedge^{n-p} T^*M$ que es una generalización de la bien conocida identidad de Green del cálculo vectorial clásico, esta identidad es crucial para obtener una fórmula que resuelve ciertas ecuaciones diferenciales satisfecha por \mathcal{P} .

Sea $\{\gamma^j, \gamma_j\}$ un par de bases reciprocas ortonormales (con respecto a g) $\sec \bigwedge^1 T^*M \hookrightarrow \sec \mathcal{C}(M, \mathbf{g})$. En lo que sigue la notación $\bar{\gamma}_i$ ($\bar{\gamma}^i$) significa que estas formas son calculadas en el punto $\bar{x} \in \bar{M}$. Ahora, se introduce la distribución de Dirac $\delta_{\bar{x}} \in \sec \bigwedge^p T^*\bar{M} \otimes \sec \bigwedge^{n-p} T^*M$ por

$$\int \delta_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} = \mathcal{P}(\bar{x}) \quad (3.49)$$

$\delta_{\bar{x}}$ tiene soporte solamente en \bar{x} . Si $\{x^i\}$ son las coordenadas de una carta del atlas máxima de M y si elegimos $\{\gamma^j, \gamma_j\} = \{dx^j, dx_j = g_{ij}dx^j\}$ entonces podemos fácilmente verificar que

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{x}} &= \frac{(-1)^{p(n-p)}}{p!} \bar{d}_{i_1 \dots i_p} \otimes \star d^{i_1 \dots i_p} \delta(x - \bar{x}), \\ \delta(x - \bar{x}) &= \delta(x^1 - \bar{x}^1) \dots \delta(x^n - \bar{x}^n), \\ \bar{d}_{i_1 \dots i_p} &= d\bar{x}_{i_1} \wedge \dots \wedge d\bar{x}_{i_p}, \quad d^{i_1 \dots i_p} = dx^{i_1} \wedge \dots \wedge dx^{i_p}. \end{aligned} \quad (3.50)$$

En la ecuación (3.50) $\delta(x^i - \bar{x}^i)$, $i = 1, 2, \dots, n$ son las distribuciones usuales (escalares) de Dirac.

La distribución de Green es supuesta para satisfacer la siguiente ecuación diferencial

$$\partial^2 \mathbf{G}_{\bar{x}} = \square \mathbf{G}_{\bar{x}} = -(d\delta + \delta d) \mathbf{G}_{\bar{x}} = \delta_{\bar{x}}. \quad (3.51)$$

Ahora probaremos la siguiente identidad

$$\begin{aligned} \delta_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} &= (-1)^{n+p} [d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \delta\mathcal{P} - \delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge d\mathcal{P}] \\ &\quad - d[\delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} - (-1)^{np+p+s+1} \star \mathcal{P} \wedge \star d\mathbf{G}_{\bar{x}}]. \end{aligned} \quad (3.52)$$

Empezamos con el producto $d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \delta\mathcal{P}$ y haciendo algunas transformaciones sobre éste, usando la definición del codiferencial de Hodge y algunas otras bien conocidas identidades involucrando el producto exterior, tenemos

$$\begin{aligned}
 d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \delta\mathcal{P} &= (-1)^{n(p+1)+s+1} d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \star d \star \mathcal{P} \\
 &= (-1)^{np+n+s+1} d \star \mathcal{P} \wedge \star d\mathbf{G}_{\bar{x}} \\
 &= (-1)^{s+1} d(\star\mathcal{P} \wedge \star d\mathbf{G}_{\bar{x}}) - (-1)^{n+p} \delta d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} \\
 &= (-1)^{s+1} d(\star\mathcal{P} \wedge \star d\mathbf{G}_{\bar{x}}) + (-1)^{n+p} [(-\delta d - d\delta)\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P}] \\
 &\quad + (-1)^{n+p} d\delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} \\
 &= (-1)^{s+1} d(\star\mathcal{P} \wedge \star d\mathbf{G}_{\bar{x}}) + (-1)^{n+p} \delta_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} + (-1)^{n+p} d(\delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P}) \\
 &\quad + \delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge d\mathcal{P} \tag{3.53}
 \end{aligned}$$

desde donde sigue la ecuación (3.52).

Integrando ambos lados sobre la región n -dimensional $\mathcal{M} \subset M$ tenemos

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\bar{x}) &= \int_{\mathcal{M}} \delta_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} \\
 &= (-1)^{n+p+1} \int_{\mathcal{M}} [d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \delta\mathcal{P} - \delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge d\mathcal{P}] \\
 &\quad - \int_{\mathcal{M}} d[\delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} + (-1)^{n+p+s+1} \star d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \star\mathcal{P}] \tag{3.54}
 \end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}(\bar{x}) &= (-1)^{n+p} \int_{\mathcal{M}} [d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \delta\mathcal{P} - \delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge d\mathcal{P}] \\
 &\quad - \int_{\partial\mathcal{M}} \delta\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \mathcal{P} - (-1)^{n+p+s} \star d\mathbf{G}_{\bar{x}} \wedge \star\mathcal{P}. \tag{3.55}
 \end{aligned}$$

Ecuaciones análogas a la ecuación (3.55) aparecen en el libro de Thirring [43]. Sin embargo, hay que tomar cuidado, pues comparando las ecuaciones tenemos una diferencia por un (-1) , debido a la definición del codiferencial de Hodge.

3.2. Bibliografía

1. I. Agricola and T. Friedrich, *On the Holonomy of Connections with Skew-Symmetric Torsion*, Math. Ann. **328**, 711 (2004), .
2. I. Agricola and T. Friedrich, *The Casimir Operator of a Metric Connection with Skew-Symmetric Torsion*, J. Geom. Phys. **50**, 188 (2004), .
3. Bishop R.L. and Goldberg S.I., *Tensor Analysis On Manifolds*, Dover Publications, Inc. New York (1980).
4. J. M. Bismut, *A Local Index Theorem for non Kähler Manifolds*, Mat. Ann. **284**, 681 (1989) .
5. Chen, F. C., Linearity of Electromagnetic Field Energy-Momentum, *Am. J. Phys.* **36**, 390-393 (1968).
6. P. Cerejeiras and U. Kähler, *Math. Meth. Appl.Sci.*, **23**, 81-101, (2000).
7. P. Cerejeiras and U. Kähler and F. Sommen: *Math. Meth. Appl.Sci.*, **28**, 1715-1724, (2005).
8. A. Crumeyrolle, *Orthogonal and Symplectic Clifford Algebra*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1990.
9. P. Dalakov and S. Ivanov, *Harmonic Spinors of the Dirac Operator of Connection with Torsion in Dimension Four*, Class. Quant. Grav. **18**, 253 (2001),
10. Farlow, S. J., *Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*, J. Wiley & Sons Inc., New York, 1982.
11. Fernández, V. V., Moya, A. M., and Rodrigues, W. A. Jr., Euclidean Clifford Algebra, *Adv. Appl. Clifford Algebras* **11**, 1-21 (2001).
12. Fernández, V. V., Moya, A. M., and Rodrigues, W. A. Jr., Metric Clifford Algebra, *Adv. Appl. Clifford Algebras* **11**, 49-68 (2001).
13. T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics 25, Am. Math. Soc., Providence, Rhode Island, 2000.
14. R. Geroch, *Spinor Structure of Space-Times in General Relativity. II*, J. Math. Phys. **9**, 1739 (1968), .
15. Gürlebeck K and Kähler U, Ryan J and Sprößig W, *Clifford analysis over unbounded domains*, Advance in applied mathematics, **19**, 216-239 (1997).
16. Gürlebeck K and Sprößig W, *Quaternionic analysis and elliptic boundary values problems*, Akademie-Verlag: Berlin, 1989.
17. Jenkins, F. A. and White, H. E., *Fundamentals of Physics Optics* (4th edition), McGraw-Hill, New York, 1976.
18. U. Kähler, *On a Direct Decomposition of the Space $L_q(\Omega)$* . Journal for Analysis and its Applications, **18**, N° 4, 839-848, (1999).
19. Kondrashuck, I. , Notte-Cuello, E. A. and Rojas-Medar, M. A., *Stationary Asymmetric Fluids and Hodge Operator*, Bol. Soc. Esp. Mat. Apl.N° 47, 99-106 (2009).
20. Kondrashuck, I. , Notte-Cuello, E. A. and Rojas-Medar, M. A., *Magnetohydrodynamic type equations over Clifford formalism*, Journal Non Linear Mathematical physics, 17, N° 3, (2010).
21. Hestenes, D., *Spacetime Algebra*, Gordon and Breach, New York, 1966, 1987, 1992.
22. Hoffman K., and Kunze R., *Álgebra Lineal*, Prentice-Hall Hispanoamericana, S.A., 1973.

23. H. B. Lawson, Jr. and M. L. Michelson, *Spin Geometry*, Princeton University Press, Princeton, 1989.
24. A. Lichnerowicz, *Spineurs Harmonique*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A 257, 7 (1963), .
25. Levine, R. C., False Paradox of Superposition in Electric and Acoustic Waves, *Am. J. Phys.* **48**, 28-31 (1980).
26. R. A. Mosna and W. A. Rodrigues, Jr., *The Bundles of Algebraic and Dirac-Hestenes Spinor Fiedls*, J. Math. Phys. **45**, 2945 (2004), .
27. E.A. Notte-Cuello, W. A. Rodrigues, Jr. and Q. A. G. Souza, *The Square of the Dirac and spin-Dirac Operators on a Riemann-Cartan Space(time)*, Rep. Math. Phys., **60**, N°1, 135 (2007).
28. Notte-Cuello, E. A., and Rodrigues, W. A. Jr., A Maxwell Like Formulation of Gravitational Theory in Minkowski space-time, Int. J. Mod. Phys. D **6**, 1027-1041, (2007).
29. Notte-Cuello, E. A., and Rodrigues, W. A. Jr., Superposition Principle and the Problem of the Additivity of Energies of Momenta of Distinct Electromagnetic fields. Rep. Math. Phys., **62**, N°1, 91-101(2008).
30. Notte-Cuello, E. A., da Rocha R., and Rodrigues, W. A. Jr., The Effective Lorentzian and Teleparallel space-time Generated by a Free Electromagnetic Field. Rep. Math. Phys., **62**, N°1, 69-89 (2008).
31. Pikelner S B, Grundlagen der Kosmischen elektrodynamik. Moscou, 1966.
32. D. L. Rapoport, *Cartan-Weyl Dirac and Laplacian Operators, Brownian Motions: The Quantum Potential and Scalar Curvature, Maxwell's and Dirac-Hestenes Equations, and Supersymmetric Systems*, Found. Phys. **35**, 1383 (2005) .
33. D. L. Rapoport, *Stochastic Processes in Conformal Riemann-Cartan-Weyl Gravitation*, Int. J. Theor. Phys. **30**, 1497 (1991), .
34. W. A. Rodrigues, Jr., *Differential Forms on Riemannian (Lorentzian) and Riemann-Cartan Structures and some Applications to Physics*: arXiv: 0712.3067v5 (2008).
35. Rodrigues, W. A. Jr. , Algebraic and Dirac-Hestenes Spinors and Spinor Fields, *J. Math. Physics* **45**, 2908-2944 (2004). [math-ph/0212030]
36. W. A. Rodrigues, Jr. and E. Capelas Oliveira, *The Many Faces of Maxwell, Dirac and Einstein Equations. A Clifford Bundle Approach*, Lecture Notes in Physics 722, Springer, New York, 2007.
37. Rodrigues, W. A. Jr., Souza, Q. A. G., Rocha, R., *Conservation Laws on Riemann-Cartan, Lorentzian and Teleparallel Spacetimes*, [math-ph/0605008]
38. Ryan, J. and Spössing (eds.), *Clifford Algebras and their Applications in Mathematical Physics (Ixtapa-Zihuatanejo, Mexico 1999)*, vol. **2**, *Clifford Analysis, Progress in Physics* **19**, Birkhäuser, Boston Basel and Berlin, 2000.
39. Schlüter A, *Dynamic des Plasmas, I and II*. Z. Naturforsch. 5a⁻ (1950), 72-78; 6a⁻, (1951), 73-79.
40. Sachs, R. K. and Wu, H., *General Relativity for Mathematicians*, Springer-Verlag, New York, 1977.
41. Q. A. G. Souza and W. A. Rodrigues, Jr., *The Dirac Operator and the Structure of Riemann-Cartan-Weyl Spaces*, in P. Letelier and W. A. Rodrigues, Jr. (eds.), *Gravitation: The Spacetime Structure*, World Scientific Publ. Co., Singapore, 179-212 (1994).
42. Strong, J., *Concepts of Classical Optics*, Fremann, San Francisco, 1958
43. Thirring, W., *Classical Field Theory*, vol. 2, Springer-Verlag, New York, 1980.

44. Wu, T.T. and Lehmann, Spreading of Electromagnetic Pulses, *J. Appl. Phys.* **58**, 2064-2065 (1985).